



## EVALUARE ÎN EDUCAȚIE la MATEMATICĂ

### ETAPA a II-a – 20.02.2010

**CLASA a X- a – TC+CD 4ore**

### Soluții

#### Subiectul I

Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă punctajul maxim prevăzut în dreptul fiecărei cerințe (5puncte), fie 0 puncte.

- Nu se acordă punctaje intermediare.

Nr. item	I.1.	I.2.	I.3.	I.4.	I.5.	I.6.	I.7.	I.8.	I.9.	I.10.
Rezultate	E	A	A	D	B	B	D	B	C	A

#### Subiectul II

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- Se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem

1.  $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3 \in \mathbb{Q}$  (1 punct);  $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3 = x + \frac{1}{x} + 3\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$  (1 punct);  $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Q}$  (1 punct).

2.  $[\log_3 x] = 0$  (1 punct).  $0 \leq \log_3 x < 1$  (1 punct).  $x \in [1, 3)$  (1 punct).

3.  $\log_3 6 \log_7 8 < \log_3 7 \log_7 8 = \log_3 8$  (1 punct).  $\log_3 8 < 2$  (1 punct).  $\log_3 7 + \log_7 3 \geq 2$  (1 punct).

4. Fie  $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$ . Avem  $\bar{z} = a - bi$  (1 punct). De aici  $z + 2\bar{z} = 3a - bi \Rightarrow a = 0, b = -1$  (1 punct).

Obținem  $z = -i$  (1 punct).

5. Fie  $O, A, B, C$  punctele de afixe  $0, z_1, z_2, z_1 + z_2$  în planul complex.  $OACB$  este paralelogram (1 punct).

Din  $OA = |z_1| = 1 = |z_2| = OB$  rezultă  $OACB$  romb (1 punct).

Din  $OC = \sqrt{3} \Rightarrow \angle OAC = 120^\circ \Rightarrow AB = 1 = |z_1 - z_2|$  (1 punct).

6.  $\Delta < 0$  deci rădăcinile sunt numere complexe nereale conjugate (2 puncte).

$|z_1|^2 = z_1 z_2 = \frac{100}{5} = 20 \Rightarrow |z_1| = |z_2| = \sqrt{20}$  (1 punct).

7.  $z^4 = -8 \mid z \Rightarrow |z|^4 = 8 \mid z|$  (1 punct). Avem  $|z| = 0 \Rightarrow z = 0$  sau  $|z| = 2 \Rightarrow z^4 = -16$  (1 punct) de unde  $z = \pm\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i$  (1 punct).

8.  $f(x) = y, y > 0 \Rightarrow \frac{3}{2} 6^x = y$  (1 punct). Ecuația are soluția unică  $x = \log_6 \frac{2y}{3}$  (1 punct). Inversa este

$f^{-1}: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(y) = \log_6 \frac{2y}{3}$ . (1 punct).

9. Observăm soluția  $x = 1$  (1 punct). Funcția din stânga este strict crescătoare (1 punct).

Soluția este unică (1 punct).

10.  $x^{x \log_{x^2} 2} = \left((x^2)^{\log_{x^2} 2}\right)^{\frac{x}{2}} = 2^{\frac{x}{2}} = \sqrt{2}^x$  (1 punct).

Cu notația  $a = \sqrt{2}^x$  avem  $a^2 - 4a + 3 = 0 \Rightarrow a = 1, a = 3$  (1 punct). Soluțiile sunt 0 și  $\log_{\sqrt{2}} 3$ . (1 punct).

### Subiectul III

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- Se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

1. Dacă  $f(x) = f(y)$ , atunci  $\sqrt{2}(x - y) = [\sqrt{2}x] - [\sqrt{2}y] \in \mathbb{Z}$  (1 punct). Dacă  $x \neq y$ , atunci  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ , fals (0,5 puncte), deci  $f$  este injectivă (0,5 puncte).
2.  $f(x) = k \ln x$ , unde  $k = \frac{1}{\lg a} - \frac{1}{\lg(a+1)} \in \mathbb{R}^*$  (1 punct). Ecuația  $f(x) = y, y \in \mathbb{R}$  are soluția unică  $x = e^{\frac{y}{k}} \in (0, \infty)$ , deci  $f$  este bijectivă (1 punct).
3. Din  $z = |z| \frac{1 + \lambda i}{1 - \lambda i}$  rezultă  $\lambda = i \frac{|z| - z}{|z| + z}$ . (1 punct)  
Rămâne de arătat că  $\lambda \in \mathbb{R}$ , echivalent cu  $\lambda = \bar{\lambda}$  (0,5 puncte). Finalizare (0,5 puncte).
4. Notăm  $\arctg a + \arctg b = s$ . Din  $ab + a + b = 1$  avem  $\tg s = \frac{a+b}{1-ab} = 1$  (1 punct). Deoarece  $\arctg a, \arctg b \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \arctg a + \arctg b \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$  (0,5 puncte) deci  $s = -\frac{3\pi}{4}$  (0,5 puncte).
5. Pentru fiecare  $k = 1, 2, \dots, 1000$ , există  $n_k \in \mathbb{N}, f(n_k) = k$  (0,5 puncte). Avem  $1000 \geq k = f(n_k) \geq \frac{n_k^2}{10} \Rightarrow n_k \leq 100$  (0,5 puncte). Numerele  $n_1, n_2, \dots, n_{1000}$  sunt distincte și aparțin mulțimii  $\{1, 2, \dots, 100\}$ , fals (1 punct).