



## EVALUARE ÎN EDUCAȚIE la MATEMATICĂ

## ETAPA I – 17.10.2009

CLASA a X- a – TC+CD - 4ore

## Barem de corectare și notare

## Subiectul I

Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă punctajul maxim prevăzut în dreptul fiecărei cerințe (5puncte), fie 0 puncte.

Nu se acordă punctaje intermediare.

Nr. item	I.1.	I.2.	I.3.	I.4.	I.5.	I.6.	I.7.	I.8.	I.9.	I.10.
Rezultate	E	C	A	B	A	D	A	B	B	D

## Subiectul II

Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.

Se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem

1. Egalitatea este echivalentă cu  $na - ma = (n - m)a \in \mathbb{Z}$  (2 puncte), de unde  $n = m$  (1 punct).
2.  $4^4 - 2^4 = 256 - 16 \geq 240$  (1 punct). Presupunând afirmația adevărată pentru  $n$ , avem  $4^{n+1} - 2^{n+1} \geq 2(4^n - 2^n)$  (1 punct)  $\geq 2 \cdot 60n > 60n + 60 = 60(n+1)$  (1 punct).
3. Avem  $a_{10} + a_{2000} = a_1 + a_{2009} = 2$  (1 punct), adică  $S_{2009} = \frac{a_1 + a_{2009}}{2} \cdot 2009$  (1 punct), deci  $S_{2009} = 2009$  (1 punct).
4. Valoarea maximă a funcției este  $y_v = \frac{61}{12} = 5 + \frac{1}{12}$  (1 punct). Cea mai mare valoare întreagă este 5, (1 punct) obținută când  $-3x^2 + x + 5 = 5 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{3}$  (1 punct).
5.  $g(f(x)) = \begin{cases} 2f(x)+1, & f(x) \leq 1 \\ 1-f(x), & f(x) > 1 \end{cases}$  (1 punct).  $f(x) \leq 1 \Leftrightarrow x \in [1, 2]$  (1 punct), deci  $g(f(x)) = \begin{cases} 2x^2 - 6x + 7, & x \in [1, 2] \\ -x^2 + 3x - 2, & x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty) \end{cases}$  (1 punct).
6.  $\overrightarrow{NM} = \frac{7}{12}\overrightarrow{NB} + \frac{5}{12}\overrightarrow{NC}$  (1 punct).  $a = -\frac{7}{12}, b = -\frac{5}{12}$  (1 punct), deci  $a + b = -1$  (1 punct).
7.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$ , unde  $M$  este mijocul lui  $BC$ . (1 punct), adică punctele  $A, O, M$  sunt coliniare (1 punct). Rezultă cerința (1 punct).
8. Triunghiul  $ABD$  este isoscel (1 punct), deci  $AI \perp BD$  (1 punct). Atunci  $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$  (1 punct).
9. Echivalent cu  $\sum \sin 2A = 4 \prod \sin A$  (1 punct). Avem  $\sum \sin 2A = 2 \sin(A+B) \cos(A-B) + 2 \sin C \cos C = 2 \sin C \cdot (\cos(A-B) - \cos(A+B))$  (1 punct) și apoi  $2 \sin C \cdot (\cos(A-B) - \cos(A+B)) = 4 \sin C \sin A \sin B$  (1 punct).
10. Avem  $\sin \frac{5\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{12}$  (1 punct) deci  $\sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{12}$  (1 punct)  $= \frac{1}{4}$  (1 punct).

### Subiectul III

Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.  
Se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

1. Avem  $\sqrt{n} + \sqrt{n+3} < \sqrt{4n+6}$  (0,5 puncte). Presupunem că există  $a \in \mathbb{Z}$  cu  $\sqrt{n} + \sqrt{n+3} < a < \sqrt{4n+6}$   
 $\sqrt{4n+6} \notin \mathbb{Q}$ , deoarece  $4k+2$  nu e pătrat. Rezultă  $(2n+3)^2 - 9 < (a^2 - 2n - 3)^2 < (2n+3)^2$  (0,5 puncte). Atunci  
 $(2n+3)^2 - 9 < (a^2 - 2n - 3)^2 \leq (2n+2)^2 \Rightarrow 4n+5 < 9$ , fals (1 punct).

2. Exponentul lui 3 în  $(2n)!$  este  $\sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{2n}{3^k} \right\rfloor$  (0,5 puncte).

Avem  $\sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{2n}{3^k} \right\rfloor \leq \sum_{k \geq 1} \frac{2n}{3^k} = 2n \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^p}{1 - \frac{1}{3}}$  (0,5 puncte), unde  $p$  este numărul de termeni nenuli ai sumei.

Urmează  $\sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{2n}{3^k} \right\rfloor \leq n \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^p\right) < n$  (1 punct).

3. Prin inducție  $x_n = \frac{nx_1 - (n-1)}{(n-1)x_1 - (n-2)}$ ,  $n \geq 1$  (1 punct), deci  $x_n = \frac{2n+1}{2n-1}$  (1 punct).

4. Avem  $p - a = r$ . Notând cu  $I$  centru cercului înscris și cu  $D$  punctul de contact al cercului cu latura  $AC$ , relația devine  $AI = ID$  (1 punct). Rezultă  $\angle IAD = 45^\circ \Rightarrow A = 90^\circ$  (1 punct).

5.  $f(0) = 0$  (0,5 puncte). Funcția  $f$  este unic determinată de restricția sa la mulțimea  $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$  (1 punct).

Sunt  $201^{100}$  funcții (0,5 puncte).

Total 100 de puncte din care 10 sunt din oficiu.