



FUNDAȚIA DE EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

browse on web: [www.evaluareineducatie.ro](http://www.evaluareineducatie.ro)

EVALUĂRI NAȚIONALE CONTINUE  
ÎN EDUCAȚIE

Desfășurate în parteneriat MECI și sub egida Academiei Române



Numele  
și  
Prenumele

Școala

Protocol M.E.C.I. nr. 46359/ 07.12.2007 (Matematică)

Protocol M.E.C.I. nr. 27829/ 05.03.2008 (Lb. Română, Lb. Engleză, Lb. Germană, Informatică, Fizică)

## EVALUARE ÎN EDUCAȚIE la MATEMATICĂ

ETAPA I – 17.10.2009

### XII. OSZTÁLY – M1

Minden tétel kötelező. Hivatalból 10 pont jár.

Munkaidő 3 óra.

#### I. TÉTEL (50 pont) Karikázzátok be a helyes választ.

- 5p 1. A  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n}$  határérték, egyenlő:  
A) 0; B)  $\infty$ ; C)  $e$ ; D) 1; E)  $-\infty$ .
- 5p 2.  $f(x) = (x+1)e^{-x}$  függvény deriváltja  $\mathbb{R}$ -en, egyenlő:  
A)  $f'(x) = -xe^{-x}$ ; B)  $f'(x) = xe^{-x}$ ; C)  $f'(x) = e^{-x}$ ; D)  $f'(x) = -e^{-x}$ ; E)  $f'(x) = (x-1)e^{-x}$ .
- 5p 3. Az  $f(x) = x^2 \ln x$  függvény másodrendű deriváltja a  $(0, \infty)$  intervallumon, egyenlő:  
A)  $f''(x) = 1 + \ln x$ ; B)  $f''(x) = 3 + 2 \ln x$ ; C)  $f''(x) = x + \ln x$ ; D)  $f''(x) = 2 \ln x$ ; E)  $f''(x) = x^3$ .
- 5p 4. Az  $a$  valós szám értéke, amelyre az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 3 \\ a, & x > 3 \end{cases}$  függvény, folytonos:  
A) 1; B) 2; C) 3; D) 0; E) -1.
- 5p 5. A  $\lim_{x \searrow 0} x e^x$  határérték, egyenlő:  
A) 0; B) 1; C)  $e$ ; D)  $\infty$ ; E)  $\sqrt{e}$ .
- 5p 6. A  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in S_5$  permutáció inverze:  
A)  $\sigma$ ; B)  $\sigma^2$ ; C)  $\sigma^3$ ; D)  $\sigma^4$ ; E)  $\sigma^5$ .
- 5p 7. A  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$  determináns értéke:  
A) 1; B) 3; C) 2; D) 0; E) 4.
- 5p 8. Legyen  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix}$ , egy másodrendű, valós elemű mátrix. Ha az  $A$  mátrix rangja 1, akkor  $m$  egyenlő:  
A) 1; B) 2; C) 4; D) 3; E) 0.
- 5p 9. Adott az  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  mátrix. Az  $I_2 + A$  mátrix, inverze:  
A)  $I_2$ ; B)  $A^{-1}$ ; C)  $I_2 - A$ ; D)  $I_2 + A$ ; E)  $I_2 + A^{-1}$ .
- 5p 10. Adottak az  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  és  $B = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  mátrixok úgy, hogy  $AB = BA$ . Mennyivel egyenlő az  $a$ ?  
A) 0; B) 2; C) 1; D) -1; E) 4.

## II. TÉTEL (30 pont) Írjátok le a részletes megoldást !

- 3 p 1. Adott az  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  mátrix. Határozzátok meg az összes olyan  $X \in M_2(\mathbb{R})$  mátrixot amelyre  $AX = XA$  és  $\det(X) = 0$ .
- 3 p 2. Legyen  $\sigma \in S_{2009}$  azzal a tulajdonsággal, hogy  $\sigma = \sigma^{-1}$ . Mutassuk ki, hogy létezik  $k \in \{1, 2, \dots, 2009\}$  úgy, hogy  $\sigma(k) = k$ .
- 3 p 3. Legyen  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  és az  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix}$  mátrix. Mutassuk ki, hogy a  $\det(A)$  osztható 6-tal.
- 3 p 4. Legyen  $a, b \in \mathbb{R}$ . Határozzuk meg az  $A = \begin{pmatrix} a-1 & a & a+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ b-1 & b & b+1 \end{pmatrix}$  mátrix, rangját!
- 3 p 5. Adott az  $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ mx + 3y + 2z = m \\ (m+1)x + y + z = m^2 \end{cases}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  lineáris egyenletrendszer. Mutassuk ki, hogy az  $m$  bármely értékére, az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van!
- 3 p 6. Számítsátok ki:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 + n + 1} - 2n)$ .
- 3 p 7. Adott az  $(x_n)_{n \geq 1}$  sorozat, amelyben  $x_0 = -5$  és  $x_{n+1} = x_n^2 + x_n + 2$ ,  $n \geq 1$ . Számítsátok ki  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .
- 3 p 8. Határozzátok meg az  $a \in \mathbb{R}$  értékét úgy, hogy az  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x \left( \sin \frac{1}{x} + \ln x + 1 \right), & x > 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$  függvény, folytonos legyen 0-ban!
- 3 p 9. Határozzátok meg az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$  függvény grafikus képének aszimptótáit!
- 3 p 10. Tanulmányozzátok az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x \ln(x^2 + 1) + 2 \arctg x$  függvény monotonitását!

## III. TÉTEL (10 pont) Írjátok le a részletes megoldást !

- 2 p 1. Számítsátok ki:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - \ln^3(1+x)}{x^4}$ .
- 2 p 2. Adott az  $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  mátrix. Tekintsük az  $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1}$  sorozatokat úgy, hogy  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix}$ . Számítsátok ki:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ .
- 2 p 3. Határozzátok meg az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 2x + \sqrt[3]{(x-1)^2}$  függvény, szélsőértékpontjait!
- 2 p 4. Adott az  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$  mátrix. Mutassátok ki, hogy végtelen sok olyan  $B \in M_3(\mathbb{Z})$  mátrix van, amelyre  $AB = O_3$ .
- 2 p 5. Legyen  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  egy deriválható függvény, amelyre  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 1$  és  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - xf'(x)) = 2$ . Határozzátok meg az  $f$  aszimptótáját  $+\infty$ -ben!

Az elérhető maximális pontszám a 100 pont.