



EVALUARE ÎN EDUCAȚIE la MATEMATICĂ

ETAPA a III-a – 9.05.2009

CLASA a XI- a – M1

Barem de corectare și notare

Subiectul I

Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă punctajul maxim prevăzut în dreptul fiecărei cerințe (5puncte), fie 0 puncte.

Nu se acordă punctaje intermediare.

Subiectul	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Răspunsul	E	C	B	A	E	D	C	A	E	A

Subiectul II

Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.

Se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem

1. Determinantul sistemului este $(m+1)^2$ (1 punct); în cazul $m \neq -1$ sistemul este compatibil (1 punct); pentru $m = -1$, primele două ecuații sunt incompatibile (1 punct).

2. Funcția este continuă, deci imaginea ei este un interval I (1 punct); $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ (1 punct);

$\lim_{n \rightarrow \infty, n \in \mathbb{N}} f(\pi/2 + 2n\pi) = \infty$, deci $I = \mathbb{R}$ (1 punct).

3. f este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{m\}$ (1 punct); $f'_s(m) = 1 - m^2$, $f'_d(m) = m^2 - 1 \Rightarrow m = \pm 1$ (2 puncte).

4. $f^3(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow 3f^2(x)f'(x) = 6x + 2$ (1 punct); $\Rightarrow 6f(x)(f'(x))^2 + 3f^2(x)f''(x) = 6$, de unde concluzia (2 puncte).

5. Condiția revine la: $f'(x) = 0$ are două soluții (1 punct); $f'(x) = 3x^2 + 2mx + m$ (1 punct); din $\Delta > 0$ rezultă $m \in (-\infty, 0) \cup (3, \infty)$ (1 punct).

6. Limita este $L = \lim_{x \searrow 0} \frac{1+x \ln x}{x}$ (1 punct); $\lim_{x \searrow 0} \frac{\ln x}{1/x} = 0$ (1 punct); $L = \frac{1}{0_+} = \infty$ (1 punct).

7. $f'(x) = \frac{-x^2 - 2mx + 1}{(x^2 + 1)^2}$ (1 punct); $\Delta = 4m^2 + 4 > 0$ (1 punct); analizând semnul derivatei, cele două rădăcini ale derivatei sunt puncte de extrem local (1 punct).

8. $f'(x) = (x^2 + (m+2)x + m+1)e^x$ (1 punct); trebuie $\Delta \leq 0$ (1 punct); $m = 0$ (1 punct).

9. Luăm $f: (-1; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctg x - \frac{x}{x+1}$ (1 punct); $f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)(x+1)^2}$ (1 punct); 0 este punct de minim absolut, deci $f(x) \geq f(0) = 0, \forall x > -1$ (1 punct).

10. $f'(x) = 2x - 2 \ln(x^2 + 1)$ (1 punct); $f''(x) = \frac{2(x-1)^2}{x^2 + 1}$ (1 punct); $f''(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (1 punct).

Subiectul III

Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător. Se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

1. Împărțim la xyz și notăm $1/x = t, 1/y = v, 1/z = u$ (**1 punct**); eliminând u, v reiese $u = t + 3, v = -t, 7t = m - 12$, apoi $(m - 12)x = 7$, deci $m \in \{5; 11; 13; 19\}$ (**1 punct**).

2. $x - \sin x \neq 0$ pentru $x \neq 0$, deci f este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (**1 punct**); $f'(0) = \frac{1}{\sqrt[3]{6}}$ (**1 punct**).

3. Din ipoteză, funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x - mx + 1$ are în 0 un punct de minim, deci $f'(0) = 0$ (**1 punct**); reiese $m = 1$ (**0,5 puncte**); $m = 1$ convine (**0,5 puncte**).

4. Din teorema lui Rolle, $f': \stackrel{\text{def}}{=} f_1$ are cel puțin 9 rădăcini, $f_1': \stackrel{\text{def}}{=} f_2$ are cel puțin 8 rădăcini, ..., $f_8': \stackrel{\text{def}}{=} f_9$ are cel puțin o rădăcină (**1 punct**); dacă $f_k, 1 \leq k \leq 8$ are mai mult de $10 - k$ rădăcini, atunci f_9 are cel puțin două rădăcini, ceea ce contrazice faptul că f_9 este funcție de gradul I, deci $f_k, 1 \leq k \leq 9$ are exact $10 - k$ rădăcini, rădăcinile lui f_{k+1} fiind situate între rădăcinile lui f_k (**0,5 puncte**); inductiv, semnele valorilor lui $f_{10-k}, 1 \leq k \leq 9$ alternează: $(-1)^k, (-1)^{k-1}, \dots, (-1)^0$, deci cele nouă rădăcini ale lui f_1 sunt puncte de extrem pentru f (**0,5 puncte**).

5. Dacă $g(x) = f(x + T) - f(x), x \in \mathbb{R}$, atunci $g'(x) = 0$, deci $g(x) = ct = g(0) = f(T) - f(0) := c$ (**1 punct**);

din $f(x) = f(T\{x/T\} + T[x/T]) = f(T\{x/T\}) + c[x/T] = f(\alpha_x) + c[x/T]$, cu $0 \leq \alpha_x \leq T$, $x/T - 1 < [x/T] \leq x/T$ și $f(\alpha_x)/x - c/x + c/T < f(x)/x \leq f(\alpha_x)/x + c/T$ rezultă cerința (**1 punct**).