

CONCURSUL DE EVALUARE ÎN MATEMATICĂ
 desfășurat sub coordonarea prof. **CONSTANTIN NĂSTĂSESCU**, membru corespondent al
ACADEMIEI ROMÂNE
17 . 11 . 2007
Clasa a XI –a
SOLUȚII

SUBIECTUL I

1) c) 2) b) 3) a) 4) b) 5) a)

SUBIECTUL II

1) $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 13 & 20 \end{pmatrix}$

3) De exemplu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

4) De exemplu $P = Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5) 0.

6) $\frac{1}{e}$

7) De exemplu $a_n = 2 + \frac{1}{n}$.

8) De exemplu $b_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$.

9) De exemplu $a_n = (-1)^n$.

10) De exemplu $a_n = (-1)^n \cdot n$.

SUBIECTUL III

a) $x \cdot y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ și $y \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

b) $x^{-1} = x$ și $y^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

c) $m(x) = 2$ și $m(y) = 3$.

d) Se constată prin calcul direct că $\sum_{r \in S_3} m(r) = 9$.

e) În S_3 sunt 3 permutări pare și 3 permutări impare, deci produsul lor în orice ordine va fi o permutare impară, adică diferită de permutarea identică.

f) Ecuația $x^2 = e$ are în S_4 10 soluții: e și $a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$,
 $a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $a_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $a_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,

$a_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $a_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $a_9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Restul permutărilor vor fi $a_{10}, a_{11} = a_{10}^{-1}$, $a_{12}, a_{13} = a_{12}^{-1}$, a_{14} și $a_{15} = a_{14}^{-1}$, ..., $a_{23} = a_{22}^{-1}$. Se observă ușor că $a_1 a_2 a_3 = e$, $a_4 a_5 a_6 = e$, $a_7 a_8 a_9 = e$, și $a_{10} a_{11} = e$, $a_{12} a_{13} = e$, $a_{14} a_{15} = e$, ..., $a_{22} a_{23} = e$. Deci produsul $e \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{23} = e$.

- g) Dacă notăm $a_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $a_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = a_{10}^{-1}$, $a_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ și $a_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, păstrând notațiile anterioare, avem $a_{10} \cdot a_{12} \cdot a_{11} \cdot a_{13} = x$, deci produsul $e \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{10} \cdot a_{12} \cdot a_{11} \cdot a_{13} \cdot a_{14} \cdot a_{15} = x$.

SUBIECTUL IV

- a) $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3^{(n+1)!}} > 0$, deci șirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ este strict crescător.
- b)
$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{3^{(n+1)!}} + \frac{1}{(n+1)3^{(n+1)!}} - \frac{1}{n \cdot 3^{n!}} = \frac{n(n+1) + n - (n+1) \cdot 3^{(n+1)!-n!}}{n(n+1) \cdot 3^{(n+1)!}} =$$
$$= \frac{n^2 + 2n - (n+1) \cdot 3^{n! \cdot n}}{n(n+1) \cdot 3^{(n+1)!}} < \frac{(n+1)(n+1 - 3^{n! \cdot n})}{n(n+1) \cdot 3^{(n+1)!}}.$$
 Cum $3^{n! \cdot n} > n+1$ (care se demonstrează prin inducție matematică), rezultă $b_{n+1} < b_n$, deci șirul $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ este strict descrescător.
- c) Din a) și b) rezultă $a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1$, deci șirurile $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ și $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ sunt mărginite.
- d) Fiind monotone și mărginite, șirurile sunt convergente și dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.
- e) Din c) și d) rezultă $a_n < a < b_n$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ sau $0 < a - a_n < b_n - a_n$ sau $0 < a - a_n < \frac{1}{n \cdot 3^{n!}}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$. Presupunem că $a \in \mathbf{Q}$, $a = \frac{p}{q}$, cu $p, q \in \mathbf{N}^*$, $(p, q) = 1$. Atunci $0 < \frac{p}{q} - a_n < \frac{1}{q \cdot 3^{q!}}$ sau $0 < p \cdot 3^q - q \cdot 3^q \cdot a_n < 1$, fals, deoarece elementul din mijloc este număr întreg. Deci presupunerea făcută este greșită și $a \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$.
- f) Definim $d_n = 0$ și $e_n = 1$, dacă $c_n = -1$ și $d_n = 1$ și $e_n = 0$, dacă $c_n = 1$. Atunci șirurile $u_n = \frac{d_1}{3^{1!}} + \frac{d_2}{3^{2!}} + \dots + \frac{d_n}{3^{n!}}$ și $v_n = \frac{e_1}{3^{1!}} + \frac{e_2}{3^{2!}} + \dots + \frac{e_n}{3^{n!}}$ sunt monoton crescătoare și $x_n = u_n - v_n$. În plus $0 \leq u_n \leq a_n$ și $0 \leq v_n \leq a_n$, deci șirurile (u_n) și (v_n) sunt mărginite și fiind monotone sunt convergente. Deci șirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ este convergent. Cum $-a_n \leq x_n \leq a_n$, rezultă că limita șirului $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ este un număr real din intervalul

$[-a, a]$.

g) Se observă ușor că dacă $c_1 = 1$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n > a$ și dacă $c_1 = -1$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n < a$. Fie

$c_1 = 1$ și atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n > a$ și chiar $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3^{1!}} - \frac{1}{3^{2!}} - \dots - \frac{1}{3^{n!}} \right) = \frac{2}{3} - a$. Deci orice

element din intervalul $\left(0, \frac{2}{3} - a \right)$ nu poate fi limită a șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.