

CONCURSUL DE EVALUARE ÎN MATEMATICĂ
desfășurat sub coordonarea prof. **CONSTANTIN NĂSTĂSESCU**, membru corespondent al
ACADEMIEI ROMÂNE
17 . 11 . 2007
Clasa a IX -a
SOLUȚII

SUBIECTUL I

1) c) 2) d) 3) c) 4) b) 5) a)

SUBIECTUL II

1) $x_1 = 1$, $x_2 = -4$

2) $S = -5$

3) $P = 4$

4) $x^2 + x - 3 = 0$

5) 8

6) $\frac{1}{21} = 0, (047619)$, deci $a_{2007} = a_3 = 7$

7) $\sqrt{101} = 10,04\dots$, deci produsul este 0

8) Suma este $\vec{0}$

9) $O = G$ deci suma este $\vec{0}$

10) \overrightarrow{DA}

SUBIECTUL III

a) Se verifică prin calcul direct.

b) Se verifică prin calcul direct.

c) Se verifică prin calcul direct.

d) Din teorema de împărțire cu rest a numerelor întregi, există $c, r \in \mathbb{N}$, unice, astfel încât $n = cm + r$ și $r \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. Cum $(m, n) = 1$, rezultă că $r \neq 0$. Punem $d = c + 1$ și $k = m - r$ și identitatea devine $n = dm - k$, iar $k \in \{1, 2, \dots, m-1\}$.

e) Se împarte identitatea anterioară prin dn și rezultă cerința.

f) Considerăm $(a, b) = 1$ și conform punctului precedent $\frac{a}{b} = \frac{1}{d} \left(1 + \frac{k}{b} \right)$ cu $0 < k < a$. Dacă fracția $\frac{k}{b}$ este reductibilă, se simplifică, în caz contrar, $\frac{k}{b} = \frac{1}{l} \left(1 + \frac{l}{b} \right)$, unde

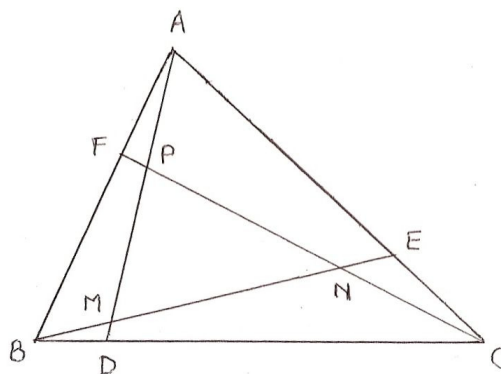
$0 < l < k < a$. Se continuă astfel până când numărătorul fracției devine egal cu 1.

Efectuând înmulțirile, obținem $\frac{a}{b} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_1 d_2} + \dots + \frac{1}{d_1 d_2 \dots d_r}$.

g) Avem $\frac{17}{18} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{16}{18} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{8}{9} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{7}{9} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{5}{9} \right) \right) \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{9} \right) \right) \right) \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16 \cdot 9}$.

Deci $n = 5$ și $r_1 = 2$, $r_2 = 4$, $r_3 = 8$, $r_4 = 16$ și $r_5 = 16 \cdot 9$.

SUBIECTUL IV



a) Evident.

b) Evident.

c) $\frac{S_{AMB}}{S_{ADB}} \cdot \frac{S_{ADB}}{S} = \frac{BD}{BC} \cdot \frac{AM}{AD} = \frac{x}{x+1} \cdot \frac{x+1}{xy+x+1} = \frac{x}{xy+x+1}$. Deci $S_{AMB} = \frac{x}{xy+x+1} S$.

d) Rezultă din c) și din relația $S_{MNP} = S - (S_{ABM} + S_{BCN} + S_{CAP})$.

e) Cum $S_{MNP} \geq 0$, deducem inegalitatea. Se poate da și o soluție algebrică bazată însă pe calcule.

f) Considerăm punctele X, Y și Z , astfel încât $\frac{AX}{XB} = \frac{BY}{YC} = \frac{CZ}{ZA} = t$ și atunci

$$S_{XYZ} = S - (S_{BXY} + S_{CZY} + S_{AXY}) = S \left(1 - \frac{3t}{(t+1)^2} \right) \text{ sau } \frac{S_{XYZ}}{S} = \left(\frac{t-1}{t+1} \right)^2. \text{ Cum } \frac{S}{S} \in \left(0, \frac{1}{4} \right),$$

Rezultă $\frac{t-1}{t+1} = \sqrt{\frac{s}{S}}$, ($t > 1$) și de aici $t = \frac{\sqrt{S} + \sqrt{s}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}}$, deci problema este rezolvată.

g) Avem $\frac{S_{DEF}}{S} = 1 - \left(\frac{x}{(x+1)(z+1)} + \frac{y}{(y+1)(x+1)} + \frac{z}{(z+1)(y+1)} \right)$. Relația $\frac{S_{DEF}}{S} \leq \frac{1}{4}$ este

echivalentă cu $\frac{x}{(x+1)(z+1)} + \frac{y}{(y+1)(x+1)} + \frac{z}{(z+1)(y+1)} \geq \frac{3}{4}$, care prin calcul devine

$xy + yz + xz + x + y + z \geq 6$. Dar $xy + yz + xz \geq 3$ și $x + y + z \geq 3$ din inegalitatea

mediilor și problema este rezolvată.