

**CONCURSUL DE EVALUARE ÎN MATEMATICĂ**  
 desfășurat sub coordonarea prof. **CONSTANTIN NĂSTĂSESCU**, membru corespondent al  
**ACADEMIEI ROMÂNE**  
**17 . 11 . 2007**  
**Clasa a X -a**  
**SOLUȚII**

**SUBIECTUL I**

1) b) 2) d) 3) c) 4) a) 5) a)

**SUBIECTUL II**

1)  $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$ .

2) 2.

3) 2

4) -1

5) 0

6)  $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$

7) 0

8)  $z^3 - 1 = 0$  sau  $z^3 = 1$

9)  $\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$

10) Cum  $z^2 + 1 = 2z$  sau  $(z - 1)^2 = 0$ , avem  $z^{2007} = 1$ .

**SUBIECTUL III**

a) Evident.

b) Cel mai mic este 10000 și cel mai mare este 88888.

c) Cum prima cifră se alege din mulțimea  $\{1, 2, \dots, 8\}$  iar următoarele 2006 cifre se aleg din mulțimea  $\{0, 1, 2, \dots, 8\}$  rezultă  $8 \cdot 9^{2006}$  elemente în mulțimea  $M$  care se scriu cu 2007 cifre.

d)  $1 + \frac{9}{10} + \dots + \left(\frac{9}{10}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}}{1 - \frac{9}{10}} = 10 \left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}\right) < 10$

e) Folosim inegalitatea  $\frac{1}{2^{k-1} + 1} + \frac{1}{2^{k-1} + 2} + \dots + \frac{1}{2^k} < \frac{2^{k-1}}{2^k}$ , pentru  $k = 1, 2, \dots, n$  și rezultă inegalitatea cerută.

f) Rezultă din inegalitatea de la punctul e).

Notăm cu  $M_n$  mulțimea numerelor din  $M$  care au cel mult  $n$  cifre. Avem evident

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_n} &\leq \sum_{k \in M_n} \frac{1}{k} \leq 8 \cdot \frac{1}{1} + 8 \cdot \frac{9}{10} + \dots + 8 \cdot \frac{9^{n-1}}{10^{n-1}} = \\ &= 8 \left( 1 + \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \dots + \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} \right) < 8 \cdot 10 = 80. \end{aligned}$$

#### SUBIECTUL IV

a) Cum  $A_1A_3A_5$  este un triunghi echilateral și  $O$  este centrul cercului circumscris rezultă

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_5} = \vec{0}$$

b) Din formula vectorului de poziție, avem  $\overrightarrow{OB_1} = \frac{\overrightarrow{OA_1} + \frac{1-x}{x}\overrightarrow{OA_2}}{1 + \frac{1-x}{x}} = x\overrightarrow{OA_1} + (1-x)\overrightarrow{OA_2}$

c) Avem  $\overrightarrow{B_3B_2} = \overrightarrow{OB_2} - \overrightarrow{OB_3} = y\overrightarrow{OA_2} + (1-y)\overrightarrow{OA_3} - z\overrightarrow{OA_3} - (1-z)\overrightarrow{OA_4}$ . Cum  $\overrightarrow{OA_4} = -\overrightarrow{OA_1}$  și  $\overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}$ , rezultă că

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B_3B_2} &= y\overrightarrow{OA_2} + (1-y-z)(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}) + (1-z)\overrightarrow{OA_1} = \\ &= (1-z-1+y+z) + (y+1-y-z)\overrightarrow{OA_2} = y\overrightarrow{OA_1} + (1-z)\overrightarrow{OA_2}\end{aligned}$$

d)  $OB_1B_2B_3$  paralelogram dacă și numai dacă  $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{B_3B_2}$ , sau

$$x\overrightarrow{OA_1} + (1-x)\overrightarrow{OA_2} = y\overrightarrow{OA_1} + (1-z)\overrightarrow{OA_2}$$

e)  $\overrightarrow{OG_{B_1B_3B_5}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_3} + \overrightarrow{OB_5})$

$\overrightarrow{OG_{B_2B_4B_6}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OB_4} + \overrightarrow{OB_6})$ , unde prin  $G_{B_1B_3B_5}$  și  $G_{B_2B_4B_6}$  am notat centrele de greutate ale triunghiurilor  $B_1B_3B_5$  - respectiv  $B_2B_4B_6$ .

$\overrightarrow{OG_{B_1B_3B_5}} = \overrightarrow{OG_{B_2B_4B_6}}$  ne conduce la  $\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_3} + \overrightarrow{OB_5} = \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OB_4} + \overrightarrow{OB_6}$ , sau utilizând relații de tipul celei de la b), vom ajunge la concluzia  $x + y = y + u = z + v$ .

f) Dacă  $Y_1Y_2 \dots Y_6$  este un hexagon regulat cu centrul în  $O$ , atunci vectorii

$\overrightarrow{OY_1}, \overrightarrow{OY_2}, \dots, \overrightarrow{OY_6}$ , verifică cerința problemei. Cum  $n = 6p$ , tot așa punctele

$Y_7, Y_8, \dots, Y_{12}$  vor forma alt hexagon regulat, etc și cerința este verificată.

g) Dacă  $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OY} + \overrightarrow{OZ}$ , atunci patrulaterul  $OYXZ$  este romb și triunghiul  $OXY$  și  $OXZ$  sunt echilaterale. Cum  $\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OT}$  ne conduce la aceeași concluzie, rezultă că  $S=X$ . Apoi  $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OU} + \overrightarrow{OV}$ , ne conduce la  $U=Z$ , etc. Astfel obținem un hexagon regulat  $XYZTUV$  care verifică cerința problemei. Orice alt punct va atrage prezența altui hexagon regulat, etc. Deci  $n$  este multiplu de 6.