

---

**CONCURSUL DE EVALUARE ÎN MATEMATICĂ**  
desfășurat sub coordonarea prof. **CONSTANTIN NĂSTĂSESCU**, membru corespondent al  
**ACADEMIEI ROMÂNE**  
**17 . 11 . 2007**  
*Clasa a VIII -a*  
**SOLUȚII**

**SUBIECTUL I**

1) c) 2) d) 3) a) 4) a) 5) c)

**SUBIECTUL II**

1) 21

2) 20

3)  $x = -2$  și  $y = 1$

4) 20 cm

5)  $\frac{19}{6}$

6) 6

7)  $\frac{15}{2}$

8)  $8\sqrt{2}$

9) 30 cm

10)  $40\text{ cm}^2$

### SUBIECTUL III

a) Numărul rațional subunitar  $\frac{1}{2}$ .

Numărul rațional supraunitar  $\frac{3}{2}$ .

b) Numărul irațional subunitar  $\sqrt{2} - 1$ .

Numărul irațional supraunitar  $\sqrt{2}$ .

c)  $q = 1,91$  și  $p = 1,01$  rezultă că între  $p$  și  $q$  nu există numere întregi și  $q - p = 0,9$ .

d) Dacă  $b - a > 1 \Rightarrow a < a + 1 < b$ . Cum  $a < [a + 1] \leq a + 1 \Rightarrow [a + 1] \in (a, b)$  și  $[a + 1]$  se află între  $a$  și  $b$ , ceea ce trebuia demonstrat.

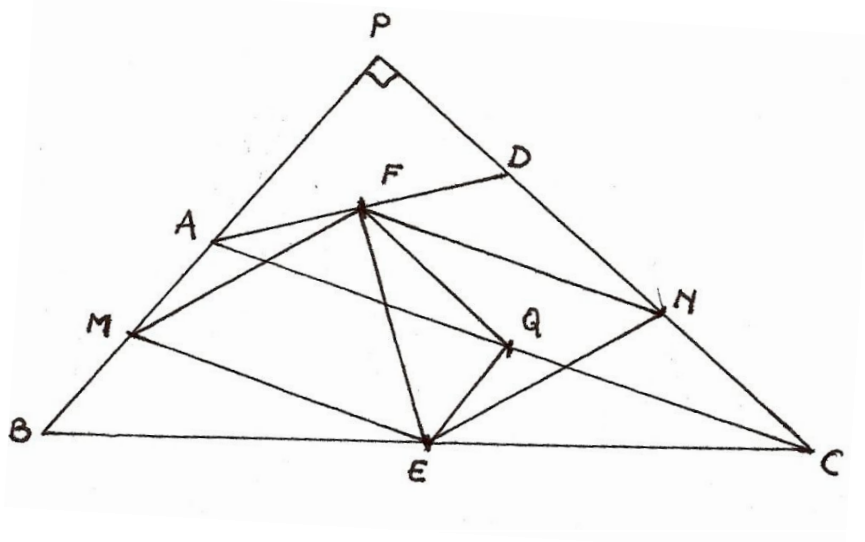
e)  $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow \left[ \frac{1}{x} \right] \leq \frac{1}{x} < \left[ \frac{1}{x} \right] + 1$ . Notăm  $\left[ \frac{1}{x} \right] + 1 = n \in \mathbf{N} \Rightarrow n > \frac{1}{x}$ .

f) Fie  $n \in \mathbf{N}$  astfel încât  $n > \frac{1}{b - a}$  (din punctul e)). Atunci  $nb - na > 1$ , deci între  $na$  și  $nb$  există cel puțin un număr întreg, conform subpunctului b). Fie  $k$  acel număr întreg, rezultă  $na < k < nb$ , deci  $a < \frac{k}{n} < b$ . Luăm  $r = \frac{k}{n} \in \mathbf{Q}$  și problema este rezolvată.

g) Considerăm  $r_1 < r_2 \in \mathbf{Q}$ , astfel încât  $a < r_1 < r_2 < b$ . Definim  $s = r_1 + (r_2 - r_1) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Numărul  $s \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$  și  $r_1 < s < r_2$ , deci  $a < s < b$ .

# SUBIECTUL IV



- a)  $F$  mijlocul lui  $AD$  și  $N$  mijlocul lui  $DC$  rezultă că  $FN$  este linie mijlocie în  $\triangle ADC$ ,

$$\text{de unde } FN \parallel AC \text{ și } FN = \frac{AC}{2}. (1)$$

$M$  mijlocul lui  $AB$  și  $E$  mijlocul lui  $BC$  rezultă  $ME$  linie mijlocie în  $\triangle ABC$ , de unde

$$ME \parallel AC \text{ și } ME = \frac{AC}{2}. (2)$$

Din (1) și (2) rezultă că  $FN \parallel ME$  și  $FN = ME$ , deci  $FNEM$  paralelogram.

- b)  $\triangle APD \Rightarrow AD^2 = AP^2 + PD^2$ ,  $\triangle BPC \Rightarrow BC^2 = BP^2 + CP^2$ . Adunând relațiile obținem  $AD^2 + BC^2 = AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2$  (3).

$\triangle BPD \Rightarrow BD^2 = BP^2 + PD^2$ ,  $\triangle APC \Rightarrow AC^2 = AP^2 + PC^2$ . Adunând relațiile obținem  $BD^2 + AC^2 = AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2$  (4).

Din relațiile (3) și (4) rezultă  $AD^2 + BC^2 = BD^2 + AC^2$ .

- c)  $E$  mijlocul lui  $BC$ ,  $Q$  mijlocul lui  $AC \Rightarrow EQ$  linie mijlocie în  $\triangle ABC \Rightarrow EQ \parallel AB$ .

$F$  mijlocul lui  $AD$ ,  $Q$  mijlocul lui  $AC \Rightarrow FQ$  linie mijlocie în  $\triangle ADC \Rightarrow FQ \parallel CD$ .

Cum  $AB \perp CD$ ,  $EQ \parallel AB$ ,  $FQ \parallel CD \Rightarrow EQ \perp FQ \Rightarrow \triangle EQF$  dreptunghic.

- d)  $\triangle EFQ \Rightarrow FQ^2 + QE^2 = FE^2$

$$FQ = \frac{DC}{2}, QE = \frac{AB}{2} \Rightarrow \frac{DC^2}{4} + \frac{AB^2}{4} = FE^2 \Rightarrow AB^2 + CD^2 = 4FE^2.$$

e)  $2A_{ABCD} = 2A_{ABC} + 2A_{ADC} =$

$$= AB \cdot BC \cdot \sin \hat{B} + AD \cdot CD \cdot \sin \hat{D} \leq AB \cdot BC + AD \cdot CD \leq \frac{AB^2 + BC^2}{2} + \frac{AD^2 + CD^2}{2},$$

(inegalitatea mediilor) . Deci  $4A_{ABCD} \leq AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$  .

f)  $\triangle PAD$  dreptunghic și  $PF$  mediană rezultă că  $PF = \frac{AD}{2}$  , deci  $\angle APF = \angle FAP$  .

$\triangle BPC$  dreptunghic și  $PE$  mediană rezultă că  $PE = \frac{BC}{2}$  , deci  $\angle BPE = \angle EBP$  . Cum  $P, E, F$

coliniare obținem  $\angle EBP \equiv \angle FAP$  , de unde  $AD \parallel CB$  (unghiuri corespondente congruente),

deci  $ABCD$  este trapez.