

2008. május 10.

XI. osztály

Megjegyzés: Minden feladat kötelező. Az I. feladat minden kérdésére egyetlen helyes válasz adható. A II. feladathoz csak válaszokat írd. A III. és IV. feladatok megoldásait írd le részletesen. Hivatalból: 10 pont. Munkaidő 2 óra 30 perc.

I. FELADAT(20p) (A vizsgalapra csak a helyes válasz betűjelét írd le!)

- (4p) 1) $A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixszorzat eredménye:
a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- (4p) 2) Az $A(1, 1)$, $B(2, 2)$ és $C(0, 3)$ pontok által meghatározott háromszög területe:
a) 1 b) 2 c) 3 d) 1,5
- (4p) 3) $A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ mátrix determinánsának értéke:
a) 0 b) 10 c) -10 d) 300
- (4p) 4) Az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x + \cos x$ függvény deriváltja:
a) $\sin x + \cos x$ b) $-\sin x + \cos x$ c) $\sin x - \cos x$ d) $-\sin x - \cos x$
- (4p) 5) $A \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\pi - 1}{x - 1}$ értéke:
a) 0 b) ∞ c) π d) 1

II. FELADAT (40p)

(A vizsgalapra csak a feladat számát és az eredményt írd!)

- (4p) 1) Vizsgáld meg az $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 4 \end{cases}$ egyenletrendszer kompatibilitását!
- (4p) 2) Írd fel egy két ismeretlenes, két egyenletből álló homogén, kompatibilis és határozatlan egyenletrendszert.
- (4p) 3) Számítsd ki: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{2008}$.
- (4p) 4) Írd fel egy olyan $A \in M_3(\mathbf{R})$ mátrixot, amelyre $\text{rang}(A) = 1$.
- (4p) 5) Számítsd ki: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$.
- (4p) 6) Ha $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^{2008}$ számítsd ki $f'(x)$ -et!
- (4p) 7) Ha $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \arctg x$ számítsd ki $f'(x)$ -et!
- (4p) 8) Ha $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ számítsd ki $f'(x)$ -et!
- (4p) 9) Ha $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = e^x \sin x$ számítsd ki $f'(x)$ -et!
- (4p) 10. Ha $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = e^{\sin x}$ számítsd ki $f'(x)$ -et!

III. FELADAT (15p)**(Írd le a feladat részletes megoldását!)**

Adottak az $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixok

és az $f : M_3(\mathbb{C}) \rightarrow M_3(\mathbb{C})$, $f(X) = AX + XB$ függvény.

- (4p) a) Számítsd ki az A mátrix determinánsát és rangját!
- (4p) b) Számítsd ki az $f(O_3)$ és $f(I_3)$ mátrixokat!
- (2p) c) Igazold, hogy $f(aX) = af(X)$, $\forall X \in M_3(\mathbb{C})$ és $\forall a \in \mathbb{C}$ esetén.
- (1p) d) Igazold, hogy $f(X + Y) = f(X) + f(Y)$, $\forall X, Y \in M_3(\mathbb{C})$ esetén.
- (1p) e) Igazold, hogy a B mátrix invertálható.
- (1p) f) Igazold, hogy az $f(X) = O_3$ egyenletnek egyetlen megoldása van $M_3(\mathbb{C})$ -ben.
- (1p) g) Igazold, hogy az f függvény bijektív.
- (1p) h) Ha $X \in M_3(\mathbb{C})$ és $f(X)$ invertálható mátrix igazold, hogy $\text{rang}(X) \geq 2$.

IV. FELADAT (15p)**(Írd le a feladat részletes megoldását!)**

Adottak az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x + 9^x + 24^x - 3^x - 8^x - 18^x$,

$g(x) = a^x + 6^x - 3^x - 4^x$, $h(x) = b^x$ függvények, ahol $a, b \in (1, \infty)$. Legyen $h^{(2)}(x) = (h'(x))'$

és $h^{(n)}(x) = (h^{(n-1)}(x))'$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 3$ esetén.

- (4p) a) Számítsd ki $g'(x)$ -et, $x \in \mathbb{R}$ esetén.
- (4p) b) Számítsd ki $g'(0)$ és $g(0)$ értékét.
- (2p) c) Igazold, hogy $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén.
- (2p) d) Határozd meg az $a \in (1, \infty)$ értékét úgy, hogy a $g(x) \geq 0$ egyenlőtlenség igaz legyen $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén.
- (1p) e) Igazold, hogy $h^{(n)}(x) = b^x (\ln b)^n$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén.
- (1p) f) Ha $p, q, r, s \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $0 < p < q < r < s$ és $p + s = r + q$ igazold, hogy
- $$p^n + s^n > r^n + q^n, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2 \text{ esetén.}$$
- (1p) g) Igazold, hogy $f^{(n)}(0) > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ esetén.

Összeállította: Ion Savu és Alexandru Cioba

MATEMATIKAI TUDÁSFELMÉRŐ VERSENY

XI. osztály