

# EVALUARE ÎN EDUCAȚIE LA MATEMATICĂ

✓EVALUARE EXTERNĂ REALIZATĂ DE FACTORI AUTORIZAȚI  
✓EVALUARE CONTINUĂ ÎN EDUCAȚIE  
✓VERIFICAREA CUNOȘTINȚELOR PE ETAPE DE PARCURGERE A MATERIEI  
[www.evaluareineducatie.ro](http://www.evaluareineducatie.ro)

2008. május 10.

IX. osztály

Megjegyzés: Minden feladat kötelező. Az I. feladat minden kérdésére egyetlen helyes válasz adható. A II. feladathoz csak válaszokat írj. A III. és IV. feladatok megoldásait írd le részletesen. Hivatalból: 10 pont. Munkaidő 2 óra 30 perc.

## I. FELADAT( 20p)

(A vizsgalapra csak a helyes válasz betűjelét írd le!)

- (4p) 1) A  $\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{10}\}$  halmaz racionális elemeinek száma:  
a) 2                      b) 1                      c) 4                      d) 3
- (4p) 2) Az  $x^2 + x - 1 = 0$  egyenlet megoldásainak összege:  
a) -1                      b) 1                      c) 2                      d) 0
- (4p) 3) Az  $x^2 + x - 1 = 0$  egyenlet megoldásainak szorzata:  
a) 0                      b) 1                      c) -1                      d) 2
- (4p) 4) Ha  $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{v} = 1$  és  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ , akkor  $(\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (3\vec{u} + 4\vec{v})$  értéke:  
a) 12                      b) 13                      c) 10                      d) 11
- (4p) 5) Egy háromszög szögfelezőinek metszéspontja a:  
a) súlypont    b) magasságpont    c) beírt kör középpontja    d) köré írt kör középpontja

## II. FELADAT ( 40p )

(A vizsgalapra csak a feladat számát és az eredményt írd!)

- (4p) 1) Oldd meg az  $x^2 - 3x + 2 < 0$  egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!
- (4p) 2) Határozd meg az  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = -x^2 + 2x - 2$  függvény maximumát!
- (4p) 3) Az  $x$  valós szám milyen értékére veszi fel minimumát az  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  
 $f(x) = x^2 + 2x - 2$  függvény?
- (4p) 4) Hány metszéspontja van az  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^2 + 2$  és  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$   
 $g(x) = -x^2 + 2x + 2$  függvények grafikus képének?
- (4p) 5) Ha  $x_1$  és  $x_2$  az  $x^2 + x - 1 = 0$  egyenlet megoldásai számítsd ki  $x_1^2 + x_2^2$  értékét!
- (4p) 6) Adj példát egy szigorúan növekvő  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  függvényre!
- (4p) 7) Adj példát egy szigorúan csökkenő  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  függvényre!
- (4p) 8)  $ABC$  háromszögben írd fel az  $A$  csúcsból húzott oldalfelező hosszát az oldalak  $a, b, c$  hosszának függvényében! (a hagyományos jelöléseket használjuk)
- (4p) 9)  $ABC$  háromszögben számítsd ki az  $E = a - 2R \sin A$  kifejezést! (a hagyományos jelöléseket használjuk)
- (4p) 10)  $ABC$  háromszögben írd fel  $\cos \frac{A}{2}$ -t az oldalak  $a, b, c$  hosszának függvényében!  
(a hagyományos jelöléseket használjuk)

**III. FELADAT ( 15p )****( Írd le a feladat részletes megoldását!)**

Adott az  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$  függvény, ahol  $f(n)$  azon  $(a, b, c)$  számhármassok számát jelöli, amelyekre  $a, b, c \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $a < b < c$  és  $a + c = 2b$ . Így  $f(1) = f(2) = 0$ .

- (4p) a) Igazold, hogy  $f(3) = 1$ .
- (4p) b) Igazold, hogy  $f(4) = 2$ .
- (2p) c) Igazold, hogy  $f(n) = f(n-1) + \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$  esetén!
- (2p) d) A matematikai indukció módszerével igazold, hogy  $\left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  esetén!
- (1p) e) Igazold, hogy  $f(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  esetén!
- (1p) f) Igazold, hogy az  $\mathbb{N} - \{f(n) | n \in \mathbb{N}^*\}$  halmaz végtelen sok elemet tartalmaz!
- (1p) g) Igazold, hogy  $\forall n \in \mathbb{N}$  esetén létezik  $p \in \mathbb{N}^*$  és léteznek az  $x_1 > x_2 > \dots > x_p > 0$  természetes számok úgy, hogy  $n = f(x_1) + \dots + f(x_p)$ .

**IV. FELADAT ( 15p )****(Írd le a feladat részletes megoldását!)**

Legyen  $O$  az  $A_1 A_2 \dots A_n$  konvex sokszög belső pontja úgy, hogy

$$\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \dots + \vec{OA}_n = \vec{0}, \quad a = OA_1 + OA_2 + \dots + OA_n, \text{ és } P \text{ a sokszög kerülete.}$$

- (4p) a) Igazold, hogy  $\vec{OA}_2 = \vec{OA}_1 + \vec{A_1 A_2}$  és  $\vec{OA}_n = \vec{OA}_1 + \vec{A_1 A_n}$  !
- (4p) b) Igazold, hogy  $\vec{A_1 A_3} = \vec{A_1 A_2} + \vec{A_2 A_3}$  és  $\vec{A_1 A_{n-1}} = \vec{A_1 A_n} + \vec{A_n A_{n-1}}$  !
- (1p) c) Igazold, hogy:  $-n\vec{OA}_1 = \vec{A_1 A_2} + \vec{A_1 A_3} + \dots + \vec{A_1 A_n}$  !
- (1p) d) Igazold, hogy  $nOA_1 \leq A_1 A_2 + A_1 A_3 + \dots + A_1 A_n$  !
- (2p) e) Ha  $n = 2p$  bizonyítsd be, hogy  $A_1 A_p \leq A_1 A_2 + A_2 A_3 + \dots + A_{p-1} A_p$  és  $A_1 A_{p+1} \leq A_1 A_{2p} + A_{2p} A_{2p-1} + \dots + A_{p+2} A_{p+1}$  !
- (1p) f) Ha  $n = 2p$  igazold, hogy  $2pOA_1 \leq (p-1)A_1 A_2 + (p-2)A_2 A_3 + \dots + A_{p-1} A_p + 0A_p A_{p+1} + A_{p+1} A_{p+2} + \dots + pA_1 A_{2p}$ .
- (1p) g) Ha  $n = 2p$  igazold, hogy  $P \geq \frac{4}{n} \cdot a$ .
- (1p) h) Ha  $n = 2p+1$  igazold, hogy  $P \geq \frac{4n}{n^2-1} \cdot a$ .

Összeállította: Ion Savu és Loredana Ioana