

# EVALUARE ÎN EDUCAȚIE LA MATEMATICĂ

✓EVALUARE EXTERNĂ REALIZATĂ DE FACTORI AUTORIZAȚI

✓EVALUARE CONTINUĂ ÎN EDUCAȚIE

✓VERIFICAREA CUNOȘTINȚELOR PE ETAPE DE PARCURGERE A MATERIEI

[www.evaluareineducatie.ro](http://www.evaluareineducatie.ro)

## MATEMATIKA TUDÁSFELMÉRŐ VERSENY

2008. május 10.

XII. osztály M2

**Megjegyzések.** Minden feladat kötelező. Az I. feladatnál csak egy helyes válasz van! A II. feladathoz csak válaszokat írj! A III. és IV. feladatok megoldását írd le részletesen! Hivatalból 10 pontot kapsz. Munkaidő 2 óra és 30 perc.

### I. FELADAT ( 20p)

**Csak a helyes válasz betűjelét írd a versenylapra!**

- (4p) 1) Az  $f = X^3 + X^2 + X + 1$  este polinom gyökeinek szorzata:  
a) 0                      b) 1                      c) -1                      d) 2
- (4p) 2) Az  $f = X^3 + X^2 + X + 1$  polinom gyökeinek összege:  
a) -1                      b) 0                      c) 4                      d) 1
- (4p) 3) Az  $f = X^3 + X^2 + X + 1$  polinom valós gyökeinek száma:  
a) 0                      b) 1                      c) 3                      d) 2
- (4p) 4) Az  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dx$  integrál értéke:  
a)  $\pi$                       b) 1                      c)  $\frac{\pi}{2}$                       d) 2
- (4p) 5) A  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n dx$  határérték értéke:  
a) 1                      b)  $\infty$                       c) 0                      d) 0,5

### II. FELADAT ( 40p ) A versenylapra csak a gyakorlat számát és az eredményt írd!

- (4p) 1) Határozd meg az  $(\mathbf{R}, \circ)$  csoport semleges elemét, ha  $x \circ y = x + y - 5, \forall x, y \in \mathbf{R}$ .
- (4p) 2) A  $(\mathbf{Z}_7, +, \cdot)$  testben számítsd ki az  $\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \hat{3} \cdot \dots \cdot \hat{6}$  szorzatot!
- (4p) 3) Adj példát egy 10 elemű gyűrűre!
- (4p) 4) Adj példát egy 11 elemű testre!
- (4p) 5) Az  $a = \int_0^{\pi} \sin x dx$  és  $b = \int_0^{\pi} x dx$  számok közül melyik nagyobb?
- (4p) 6) Számítsd ki  $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$  értékét!
- (4p) 7) Számítsd ki  $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3} dx$  értékét!
- (4p) 8) Számítsd ki  $\int_{-1}^1 \frac{\sin x}{1+x^2} dx$  értékét!
- (4p) 9) Számítsd ki  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t dt}{x^2}$  értékét!
- (4p) 10) Hány racionális gyöke van az  $f = X^3 - 2X + 1$  polinomnak?

MATEMATIKA TUDÁSFELMÉRŐ VERSENY, 2008. május 10.

XII. osztály

**III. FELADAT ( 15p ) A versenylapra írd le a részletes megoldást!**

Adottak az  $a, b, c \in \mathbf{R}$  számok és az  $f \in \mathbf{R}[X]$ ,  $f = X^3 - pX^2 + qX - r$  polinom, ameynek gyökei  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{C}$ , ahol  $p, q, r \in (0, \infty)$ .

- (4p) a) Határozd meg az  $s \in \mathbf{R}$  számot úgy, hogy teljesüljön az  $f = s(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$  egyenlőség!
- (4p) b) Számítsd ki az  $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)$  kifejezést a  $p, q, r$  függvényében!
- (2p) c) Igazold, hogy  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = p^2 - 2q$ .
- (2p) d) Igazold, hogy a  $g = X^3 - X^2 + X - 2$  polinomnak nem minden gyöke valós!
- (1p) e) Igazold, hogy ha  $x \in (-\infty, 0]$ , akkor  $f(x) < 0$ .
- (1p) f) Igazold, hogy az  $f$  polinomnak nincs gyöke a  $(-\infty, 0]$  intervallumban!
- (1p) g) Igazold, hogy ha  $a + b + c > 0$ ,  $ab + bc + ac > 0$  és  $abc > 0$ , akkor  $a > 0, b > 0, c > 0$ .

**IV. FELADAT ( 15p ) A versenylapra írd le a részletes megoldást!**

Adotak az  $f, g : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \cos x$  és  $g(x) = \frac{1}{x}$  függvények.

- (4p) a) Számítsd ki az  $f'(x)$  és  $g'(x)$ ,  $x \in (0, \infty)$  deriváltakat!
- (4p) b) Számítsd ki:  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g^2(x) dx$ .
- (2p) c) Számítsd ki  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f^2(x) dx$ .
- (2p) d) Határozd meg a  $g$  függvény grafikus képehez húzható függőleges aszimptota egyenletét!
- (1p) e) Igazold, hogy  $t^2 \cos^2 x - 2t \frac{\cos x}{x} + \frac{1}{x^2} \geq 0$ ,  $\forall t \in \mathbf{R}$ ,  $\forall x > 0$ .
- (1p) f) Az e) alpontbeli egyenlőtlenség integrálásával igazold, hogy
- $$t^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 x dx - 2t \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos x}{x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{x^2} dx \geq 0, \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$
- (1p) g) Esetleg az f) alpont felhasználásával igazold, hogy

$$\left( \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos x}{x} dx \right)^2 \leq \left( \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 x dx \right) \cdot \left( \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{x^2} dx \right).$$

Összeállította Ion Savu és Octavian Ungureanu