

**Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**Rezolvare.**

$$\text{a)} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M, \text{ pentru } a=1, b=3, c=-1.$$

$$\text{b)} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M, \text{ pentru } a=9, b=6, c=3.$$

$$\text{c)} \quad A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A + 2I_3) = 9.$$

$$\text{d)} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^2 A = A A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \Rightarrow A^2 = A^{-1}.$$

$$\text{e)} \quad A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ y+z=3 \\ x+z=-6 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} E_2 - E_1 \\ \Rightarrow \end{matrix} \begin{cases} x+y=-1 \\ x-z=-4 \\ x+z=-6 \end{cases} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**f)**  $a, b, c \in \mathbb{R}^*$  sunt în progresie geometrică de rație  $q \Rightarrow b = aq, c = aq^2$ ,

$$XY = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \\ z & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ay \\ bz & 0 & 0 \\ 0 & cx & 0 \end{pmatrix}, YX = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \\ z & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & bx \\ cy & 0 & 0 \\ 0 & az & 0 \end{pmatrix},$$

$$XY = YX \Rightarrow \begin{cases} ay = bx \\ bz = cy \\ cx = az \end{cases}, a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \begin{cases} ay = aqx \\ aqz = aq^2 y \Rightarrow y = qx, z = q^2 x \\ aq^2 x = az \end{cases}.$$