Rezolvare:

a. $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, de unde $\det A = ab-b-a = ab-(a+b)$;

b. Pentru $b=4$ matricea devine $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, de unde $\det A = 3a-4$. Se va obține ecuația cu necunoscuta a: $3a-4=5 \Leftrightarrow a=3$;

c. Pentru $a=2$ matricea devine $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, de unde $\det A = b-2$. Matricea este .inversabilă dacă şi numai dacă $\det A \neq 0$, de unde $b-2\neq 0 \Leftrightarrow b\neq 2$. În concluzie matricea A este inversabilă pentru $b\in \mathbb{R}\setminus\{2\}$.

d. Pentru $a=2$ şi $b=0$ matricea devine $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A=-2$. Calculăm matricea adjunctă

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ atunci } A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^*=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

e. Ecuația de gradul al doilea $x^2-4x+7=0$ ale cărei soluții sunt x_1 şi x_2 verifică relațiile lui Viete între coeficienții ecuației şi soluțiile acesteia, de unde vom obține $x_1+x_2=4$ şi $x_1x_2=7$. Dacă $a=x_1$ şi $b=x_2$, matricea devine $A=\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 1 \\ 0 & x_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ cu $\det A = x_1x_2-(x_1+x_2)$. Prin înlocuire se va obține $\det A=-3$.

f. $\begin{cases} 2x+z=5 \\ z=-1 \\ x+y+z=4 \end{cases}$, înlocuind $z=-1$ în prima şi în cea de a treia dintre ecuațiile sistemului se va obține $\begin{cases} 2x=6 \\ z=-1 \\ x+y=5 \end{cases}$, de unde se va obține printr-un simplu calcul $\begin{cases} x=3 \\ z=-1 \\ y=2 \end{cases}$. În acest caz, mulțimea soluțiilor sistemului va fi: $\{(3;2;-1)\}$.