Soluție

1.a) $f'(x)=\left(e^x-x-1\right)'=\left(e^x\right)'-x'-1'\Rightarrow f'(x)=e^x-1,$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$ **.**

b) $f'(x)=0\Rightarrow e^x=1\Rightarrow x=0$ **.** Din tabelul de variație rezultă că $\begin{cases} f\searrow & \textit{pentru } x\in(-\infty,0] \\ f\nearrow & \textit{pentru } x\in[0,+\infty) \end{cases}.$

c) Din b) obținem că $O(0,0)$ este punct de minim al funcției $f\Rightarrow f(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow e^x\geq x+1,\forall x\in\mathbb{R}$.

Înlocuindu-l pe x cu $0,1,2,\ldots,2007$ în relația anterioară și sumând apoi inegalitățile obținute vom avea că:

$$e^0+e^1+\ldots+e^{2007}\geq 1+2+\ldots+2008\Rightarrow\frac{e^{2008}-1}{e-1}\geq\frac{2008\cdot 2009}{2}\Rightarrow \text{concluzia.}$$

2. a) Avem $\int_0^1 f(x)e^{-x}\,dx=\int_0^1 xe^x\cdot e^{-x}\,dx=\int_0^1 x\,dx==\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1=\frac{1}{2}$.

b) $f'(x)=\left(xe^x\right)'=x'\cdot e^x+x\cdot\left(e^x\right)'=(x+1)e^x,\forall x\in\mathbb{R}$ **.**

$\int_0^1 f''(x)dx=\int_0^1\left(f'(x)\right)'dx=\left.f'(x)\right|_0^1==f'(1)-f'(0)=2e-1$ (sau se calculează efectiv derivata a doua, iar apoi se integrează prin părți).

c) Avem $\int_1^2\frac{f\left(x^2\right)}{x}dx=\int_1^2\frac{x^2e^{x^2}}{x}dx=\int_1^2 xe^{x^2}dx\overset{u(x)=x^2}{\underset{u'(x)=2x}{=}}\frac{1}{2}\int_1^2 u'(x)\cdot e^{u(x)}\,dx=\left.\frac{1}{2}e^{u(x)}\right|_1^2=\frac{e\left(e^3-1\right)}{2}$ **.**

.