

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare.

a) $2A - B - I_2 = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}.$

b) $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 6 = 5, \det(B) = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 6 = 5 \Rightarrow \det(A) + \det(B) = 10.$

c) $AB = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = BA.$

d) $AB = BA = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 5I_2 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5}B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \text{ sau } A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$

e) $A + xB = \begin{pmatrix} 1-x & -3+3x \\ 2-2x & -1+x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-x & -3+3x \\ 2-2x & -1+x \end{vmatrix} = -x^2 + 2x - 1 + 6 - 6x - 6x + 6x^2 = 5x^2 - 10x + 5 \Rightarrow$
 $5x^2 - 10x + 5 = 20 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x \in \{-1; 3\}.$

f) $B = -A \Rightarrow A^7 + B^7 = A^7 + (-A)^7 = A^7 - A^7 = O_2.$