Soluție:

1. a) $\det\left(A^2+B^2\right)=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 4 & 1\end{vmatrix}=-15$.

b) Se arată prin calcul direct.

c) Dacă $X, Y \in M_2(\mathbb{C})$ și $X\cdot Y=Y\cdot X$, atunci

$$\det\left(X^2+Y^2\right)=\det\left(\left(X+i\cdot Y\right)\left(X-i\cdot Y\right)\right)\overset{b)}{=}\det\left(X+i\cdot Y\right)\cdot\det\left(X-i\cdot Y\right).$$

Mai mult, $X-i\cdot Y=\overline{X-i\cdot Y}$, deci $\det\left(X^2+Y^2\right)=\left|\det\left(X+i\cdot Y\right)\right|^2\geq 0$.

2. a) Se folosește definiția elementului neutru.

b) Deoarece $\begin{cases} f(3)=0\\ f(4)=1\end{cases}$, obținem $\begin{cases} a=1\\ b=-3\end{cases}$ și se verifică apoi faptul că funcția $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=x-3$ este izomorfismul căutat.

c) Se demonstrează prin inducție că $\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{\text{de 2008 ori } x}=(x-3)^{2008}+3$.

Se obțin apoi soluțiile $x=1$ și $x=5$.