

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $x * 8 = 8 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b) Se demonstrează că $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x * y) * z = x * (y * z) = 8^2 (x - 8)(y - 8)(z - 8)$

c) Asociind corespunzător termenii obținem $\left[\underbrace{(-8) * (-7) * \dots * (-1) * 0 * 1 * \dots * 7}_x \right] * 8 = x * 8 = 8$

d) Se demonstrează că $\forall x, y \in H \quad x * y \in H \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 8(x - 8)(y - 8) + 8 \geq 8 \Leftrightarrow 8(x - 8)(y - 8) \geq 0 \text{ adevărat}$$

e) Se demonstrează că legea $*$ admite element neutru, adică $\exists e \in H$ a.î. $\forall x \in H \quad x * e = e * x = x$

Existența: elementul $e = 8 + \frac{1}{8}$ se determină din

$$x * e = x \Leftrightarrow 8(x - 8)(e - 8) + 8 = x.$$

Apartenența $8 + \frac{1}{8} \in H$ este evidentă...

Fie $x \in H$. x este simetrizabil $\Leftrightarrow \exists x' \in H$ a.î. $x * x' = x' * x = 8 + \frac{1}{8}$

Din $x * x' = 8 + \frac{1}{8}$ obținem $x' = \frac{1}{8^2(x - 8)} + 8 \in [8, +\infty)$

doar dacă $x \neq 8$. Deci 8 este elementul nesimetrizabil și deci $U(H) = (8, +\infty)$

f) Se alege a cu numitorul 8, de exemplu $a = \frac{1}{8} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ $a - 8 = \frac{1}{8} - 8 = \frac{1 - 8^2}{8}$

$$a * b = 8 \cdot \frac{1 - 8^2}{8} \cdot (b - 8) + 8 \in \mathbb{Z} \text{ dacă aleg } b \text{ cu numitorul } 1 - 8^2, \text{ de exemplu } b = \frac{1}{1 - 8^2} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}.$$

În această situație $b - 8 = \frac{1}{1 - 8^2} - 8 = \frac{1 - 8 + 8^3}{1 - 8}$

și deci $a * b = 8 \cdot \frac{1 - 8^2}{8} \cdot \frac{1 - 8 + 8^3}{1 - 8^2} + 8 = 1 + 8^3 \in \mathbb{Z}$