Rezolvare

1.Abscisa punctului de intersecție al graficului lui f cu axa Ox este soluția ecuației $f(x)=0$, deci are loc $f(2)=0 \Leftrightarrow (3-2m)\cdot 2+2=0 \Leftrightarrow m=2$.

2.a. Fie $f(x)=1 \Leftrightarrow x^2-5x+5=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}\notin\mathbb{Q}$.

Dacă punem $a=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ atunci $f(a)=1, a\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\Rightarrow a=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ satisface cerințele.

2.b. Scriem relațiile lui Viete : $\begin{cases} x_1+x_2=p \\ x_1x_2=p-1 \end{cases}$

Înlocuind $x_1=2x_2$ obținem $\begin{cases} 3x_2=p \\ 2x_2^2=p-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=3x_2 \\ 2x_2^2=3x_2-1 \end{cases}$.

Rezolvăm ecuația a doua ,obținem soluțiile $x_2=\frac{1}{2}; x_2=1$ pentru care $p_1=\frac{3}{2}; p_2=3$.

Ecuația dată are soluții reale pentru orice valoare reală a lui p deoarece $\Delta=(p-2)^2\geq 0, \forall p\in\mathbb{R}$.

3.Graficul lui f intersectează axa Ox în două puncte distincte dacă ecuația $f(x)=0$ are două soluții reale și distincte.Calculăm $\Delta=4(m+2)^2-4(m+1)(m+3)=4$. Deoarece $\Delta>0, \forall m\in\mathbb{R}-\{-1\}\Rightarrow \exists x_1, x_2\in\mathbb{R}$ distincte.

4.a. Condiția de existență : $x-1\geq 0$.

Notăm cu $a=\sqrt[3]{2-x}, a\in\mathbb{R}$ și $b=\sqrt{x-1}, b\geq 0$ atunci ecuația devine $a^3+b^2=1$.

Dar $a=1-b$. Din cele două egalitați avem $b\left(b^2-4b+3\right)=0. \Leftrightarrow b=0; b=1; b=3$

Înlocuind avem $x=1; x=2; x=10$. Toate aceste valori ale lui x satisfac ecuația. $\Rightarrow \mathbb{S}=\{1;2;10\}$

4.b. Condițiile de existență sunt: $\begin{cases} x+1>0 \\ x+1\neq 1 \\ 2x^3+2x^2-3x+1>0 \end{cases}$

Din definiția logaritmului avem : $(x+1)^3=2x^3+2x^2-3x+1 \Leftrightarrow x^3-x^2-6x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-x-6\right)=0$

$x=0; x^2-x-6=0 \Leftrightarrow x=0; x=-2; x=3$ dintre care numai 3 satisface condițiile de existență $\Rightarrow \mathbb{S}=\{3\}$.