Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) Se arată că $S = 0_3$.

b) Se calculează $A^2 = 14 \cdot A$, apoi $B \cdot C = I_3 + (15a+1) \cdot A$ şi se obține $a = -\frac{1}{15}$.

c) Se demonstrează prin inducție după $n \in \mathbb{N}^*$.

2. a) Deoarece $0 = \varepsilon^3 - 1 = (\varepsilon - 1)\left(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1\right)$ şi $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, rezultă concluzia.

b) Determinantul sistemului este $\Delta = (\varepsilon - 1)\left(\varepsilon^2 - 1\right)\left(\varepsilon^2 - \varepsilon\right) \neq 0$, deci sistemul are doar soluția nulă $x = y = z = 0$.

c) Din ipoteză, există $g \in \mathbb{C}[X]$, astfel încât $f_1\left(X^3\right) + Xf_2\left(X^3\right) + X^2 f_3\left(X^3\right) = \left(X^3 - 1\right) \cdot g(X)$.

Deoarece numerele 1, ε şi ε^2 sunt rădăcinile polinomului $X^3 - 1$, se obține sistemul

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 \cdot \varepsilon + a_3 \cdot \varepsilon^2 = 0 \\ a_1 + a_2 \cdot \varepsilon^2 + a_3 \cdot \varepsilon = 0 \end{cases}, \text{ unde } a_k = f_k(1),\ \forall k \in \{1, 2, 3\}.$$

Folosind punctul **b)** se deduce că $f_k(1) = 0$, $\forall k \in \{1, 2, 3\}$, de unde rezultă concluzia.