

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) Se demonstrează că $\forall x \geq 1$ și $\forall y \geq 1, x * y \geq 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2 \geq 1 \Leftrightarrow (x-1)(y-1) \geq 0 \text{ adevărat.}$$

b) Se demonstrează că $\forall x, y, z \in I, (x * y) * z = x * (y * z) = x^2 y^2 z^2 - x^2 z^2 - y^2 z^2 - x^2 y^2 + x^2 + y^2 + z^2$

c) Se arată că $\exists e \in I$ astfel încât $x * e = e * x = x, \forall x \in I$.

Existența elementului e se determină din $x * e = x, \forall x \in I$ de unde se obține $e^2 = 2 \Leftrightarrow e = \pm\sqrt{2}$.

Apartenența lui e la $[1, \infty)$ implică doar $e = \sqrt{2}$.

Se demonstrează că legea $*$ este comutativă pe I adică $x * y = y * x, \forall x, y \in I$

Deci $\exists e = \sqrt{2} \in I$ a.î. $x * e = e * x = x, \forall x \in I$.

d) $(x * x)^2 - 1 = (x^2 - 1)^2 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - x^2 + 2 - 1 = x^4 - 2x^2 + 1$ adevărat

e) Se întocmește tabla legii de compoziție $*$ pe mulțimea H .

f) Din tablă obținem elementul neutru $e = \sqrt{2}$ și faptul că 0 și $\sqrt{2}$ sunt simetrizabile în raport cu legea $*$ simetricele lor fiind $\sqrt{2}$ respectiv 0.