Soluție

1.a) Deoarece $\dfrac{f(x)}{f(x+1)}=\dfrac{x^3+x}{(x+1)^3+x+1}$ şi $\dfrac{x^3+x}{(x+1)^3+x+1}=\dfrac{x^3+x}{x^3+3x^2+4x+2}$ rezultă $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{f(x+1)}=1.$

b) Deoarece $f'(x)=3x^2+1>0$, rezultă că f este strict crescătoare , deci este injectivă.

Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, iar f este strict crescătoare şi continuă rezultă $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}$, deci f este surjectivă. Fiind injectivă şi surjectivă f este bijectivă, deci este inversabilă.

c) Notăm $f^{-1}=g$ şi $g(x)=y$. Rezultă $x=g^{-1}(y)\Leftrightarrow x=f(y)$. Atunci $x\to\infty\Leftrightarrow y\to\infty$ Prin urmare:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f^{-1}(x)}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{y\to\infty}\frac{y}{\sqrt[3]{f(y)}}=\lim_{y\to\infty}\frac{y}{\sqrt[3]{y^3+y}}=1.$$

2.a) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\int\limits_{-\pi}^{0} f(x)dx+\int\limits_{0}^{\pi} f(x)dx$. Utilizând schimbarea de variabilă $x=-t$,

rezultă $\int\limits_{-\pi}^{0} f(x)dx=-\int\limits_{\pi}^{0} f(-t)dt=\int\limits_{0}^{\pi} f(-t)dt=-\int\limits_{0}^{\pi} f(t)dt=-\int\limits_{0}^{\pi} f(x)dx$ şi astfel se obține că $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=0$.

b) $\int\limits_1^3\dfrac{f(x)}{\sin x}dx=\int\limits_1^3 x^2dx$. Dar $\int\limits_1^3 x^2dx=2c^2\Leftrightarrow\dfrac{26}{3}=2c^2$. Rezultă $c=\sqrt{\dfrac{13}{3}}\in(1,3)$.

c) $F(x)=\left(-x^2+2\right)\cos x+2x\sin x$. Considerăm şirul $(x_n')_{n\geq1}$, $x_n'=2n\pi.$ Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}F(x_n')=-\infty$.

Considerând şirul $(x_n'')_{n\geq1}$, $x_n''=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}F(x_n'')=\infty$. Prin urmare funcția F nu are limită la ∞.