

Rezolvare:

$$a. A = M + 2a \cdot I_2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + 2a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-2 & -1 \\ 4 & 2a+2 \end{pmatrix}$$

$$b. A = \begin{pmatrix} 2a-2 & -1 \\ 4 & 2a+2 \end{pmatrix}, \text{ atunci } \det A = (2a-2)(2a+2) + 4 = 4a^2 - 4 + 4 = 4a^2 \text{ de unde se obține}$$

ecuația $4a^2 = 36 \Leftrightarrow a_1 = -3, a_2 = 3$.

$$c. A = \begin{pmatrix} 2a-2 & -1 \\ 4 & 2a+2 \end{pmatrix}, \det A = 4a^2 \text{ și cum } a \neq 0 \text{ matricea } A \text{ este inversabilă. Calculăm matricea}$$

$$\text{adjunctă } A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+2 & 1 \\ -4 & 2a-2 \end{pmatrix}, \text{ atunci } A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \frac{1}{4a^2} \begin{pmatrix} 2a+2 & 1 \\ -4 & 2a-2 \end{pmatrix}.$$

$$d. \text{ Pentru } a = \frac{1}{2} \text{ matricea devine } A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \det A = 1 \neq 0, A \text{ este inversabilă și vom obține}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}. \text{ În acest caz soluția ecuației matriceale va fi } X = A^{-1}M, \text{ de unde prin calcul se obține}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$e. A = \begin{pmatrix} 2a-2 & -1 \\ 4 & 2a+2 \end{pmatrix}, \text{ de unde } \text{Tr}(A) = 2a-2 + 2a+2 = 4a \text{ și } \det A = 4a^2. \text{ Calculăm}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2a-2 & -1 \\ 4 & 2a+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a-2 & -1 \\ 4 & 2a+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a^2-8a & -4a \\ 16a & 4a^2+8a \end{pmatrix}, \text{ calculăm}$$

$$\text{Tr}(A) \cdot A - \det A \cdot I_2 = 4a \begin{pmatrix} 2a-2 & -1 \\ 4 & 2a+2 \end{pmatrix} - 4a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a^2-8a & -4a \\ 16a & 4a^2+8a \end{pmatrix}, \text{ de unde se va obține}$$

$$\text{identitatea } A^2 = \text{Tr}(A) \cdot A - \det A \cdot I_2.$$

$$f. A^3 = a^2(3M + aI_2). \text{ Din enunț se cunoaște că } A = M + aI_2, \text{ de unde } A^3 = (M + aI_2)^3. \text{ Folosind}$$

proprietatea de comutativitate a înmulțirii matricei unitate cu o altă matrice și proprietățile înmulțirii

matricelor cu scalari, se va obține: $A^3 = M^3 + 3a \cdot M^2 + 3a^2 \cdot M + a^3 \cdot I_2$. Calculăm

$$M^2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ de unde } M^3 = M^2 \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ și înlocuind în relația anterioară,}$$

$$\text{se va obține: } A^3 = 3a^2 \cdot M + a^3 \cdot I_2 = a^2(3 \cdot M + a \cdot I_2). \text{ Asadar, } A^3 - a^2(3M + aI_2) = O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$