

Rezolvare

1. a) $f'(x) = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{e^x (x-1)}{x^2}$, pentru orice $x > 0$.

b) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$, deci $x = 0$ este asimptotă verticală la dreapta.

c) Din studiul semnului derivatei lui f se obține că f este strict descrescătoare pe $(0,1]$ și crescătoare pe $[1, +\infty)$ deci $f(x) \geq f(1) = e$ pentru orice $x > 0$ de unde concluzia.

2. a) $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} + 2 \ln x + C$.

b) $V(C_f) = \int_1^2 \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 dx = \left(\frac{x^3}{3} + 4x - \frac{4}{x}\right) \Big|_1^2 = \frac{25}{3}$

c) $\int_1^2 f(x) \ln x dx = \int_1^2 x \cdot \ln x dx + \int_1^2 \frac{2}{x} \ln x dx = \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + \ln^2 x\right) \Big|_1^2 = \ln^2 2 + 2 \ln 2 - \frac{3}{4}$.