

Soluție

1.a) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BM} = \frac{\overrightarrow{BC}}{2} = \frac{\overrightarrow{AD}}{2}$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{DC} + \frac{\overrightarrow{AD}}{2} = \frac{2\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}}{2}, 2\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}.$$

b) $\overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}, \text{ deci } CA' \parallel AB.$$

2.a) Fie $CD \perp AB$, $m(\angle DAC) = 45^\circ$, rezultă triunghiul ADC isoscel $AD=DC=2\sqrt{2}$ și aria triunghiului ABC este 8.

b) Conform teoremei cosinusului $BC^2 = AC^2 + AD^2 - AB \cdot AC \cdot \cos(\widehat{CAD}) = 4\sqrt{5}$.

3.a) $B \in Ox$ rezultă $B(x_B; 0)$, $BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2$, $3^2 = (3 - x_B)^2 + (0 - y_B)^2$ rezultă $x_B=3$. Deci coordonatele punctului B sunt $(3; 0)$.

b) Panta dreptei AB : $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 5}{3 + 2} = -1$.

Fie h înălțimea din C pe AB . Condiția ca dreapta h să fie perpendiculară pe AB este :

$$m_h m_{AB} = -1, \text{ de unde rezultă } m_h = 1.$$

Ecuția dreptei h care trece prin punctul C și este perpendiculară pe AB este:

$$y - y_C = m_h(x - x_C). \text{ Prin înlocuirea coordonatelor punctului } C \text{ și } m_h \text{ rezultă ecuația } x=y.$$