

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

a) Prin calcul direct rezultă $f(x) - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-3} = 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{1, 3\}$

b) $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-3)^2} = \frac{-2x^2 + 8x - 10}{(x-1)^2(x-3)^2}, \forall x \in \mathbb{R} - \{1, 3\}$

c) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ asimptotă orizontală spre $\pm\infty$

\Rightarrow graficul funcției nu are asimptotă oblică

$$l_s(1) = \lim_{x \nearrow 1} f(x) = -\infty$$

$$l_d(1) = \lim_{x \searrow 1} f(x) = \infty \Rightarrow x = 1 \text{ asimptotă verticală}$$

$$l_s(3) = \lim_{x \nearrow 3} f(x) = -\infty$$

$$l_d(3) = \lim_{x \searrow 3} f(x) = \infty \Rightarrow x = 3 \text{ asimptotă verticală}$$

d) $f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ strict descrescătoare $\forall x \in (3, +\infty)$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{x+1}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{x+1}{x} - \frac{x+1}{3x+2}\right) = -1 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}$

f) $g'(x) = (x^2 + 3x + a + 1)e^x$

$$g \text{ crescătoare pe } \mathbb{R} \Rightarrow g'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 + 3x + a + 1 \geq 0 \Rightarrow \Delta \leq 0$$

$$\Rightarrow 5 - 4a \leq 0 \Rightarrow a \geq \frac{5}{4} \Rightarrow a \in \left[\frac{5}{4}, +\infty\right)$$