

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) Cum $x \circ y = \frac{1}{2}(x-1)(y-1) + 1$, atunci $(x \circ y) \circ z = \frac{1}{4}(x-1)(y-1)(z-1) + 1 = x \circ (y \circ z)$.

b) Folosind definiția elementului neutru ($\exists e \in \mathbb{R}$ astfel încât $x \circ e = e \circ x = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$) se obține

$$x \circ e = \frac{1}{2}(x-1)(e-1) + 1 = x, \text{ adică } (x-1)(e-3) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ și deci } e = 3.$$

c) Distributivitatea rezultă din

$$(x \circ y) * (x \circ z) = \frac{(x-1)(y-1)}{2} + 1 + \frac{(x-1)(z-1)}{2} + 1 - 1 = \frac{(x-1)(y+z-2)}{2} + 1 = x \circ (y * z)$$

d) Se verifică condițiile din definiția grupului (legea este peste tot definită, este asociativă și comutativă, admite elementul neutru $e = 1$ și orice element $x \in \mathbb{R}$ admite simetricul $x' = 2 - x \in \mathbb{R}$).

e) Cum $a \circ x = \frac{1}{2}(ax - a - x + 3) = \frac{a-1}{2}x + \frac{3-a}{2}$ și $a \circ x = a$, $\forall x \in \mathbb{R}$, atunci
$$\begin{cases} \frac{a-1}{2} = 0 \\ \frac{3-a}{2} = 1 \end{cases}, \text{ adică } a = 1.$$

f) Cum $3 \circ 1 = \frac{3-3-1+3}{2} = 1$, $x \circ 3 \circ 1 = x \circ 1 = 1$ și $x \circ x = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 1$, atunci se obține $x = 1$.