Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

a) F primitivă a funcției $f \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx \Leftrightarrow F'(x)=f(x)$; $-x^2+x-1=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}<0,\forall x\in\mathbb{R}$ (folosind descompunerea canonică) $\Rightarrow F'(x)=f(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ oricare primitivă F a funcției f este descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) $\int f(x)dx=\int\left(-x^2+x-1\right)dx=-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+\ell,\ell\in\mathbb{R}$

c) $\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx=\int_1^e\frac{-x^2+x-1}{x}dx=\int_1^e\left(-x+1-\frac{1}{x}\right)dx=\left(-\frac{x^2}{2}+x-\ln|x|\right)\Big|_1^e=\frac{-e^2+2e-3}{2}$

d) $f(x)+1=-x^2+x-1+1=-x^2+x\Rightarrow|f(x)+1|=\begin{cases}-x^2+x, x\in(0;1)\\ x^2-x, x\in\mathbb{R}/(0;1)\end{cases}\Rightarrow$

$$\int_0^2|f(x)+1|dx=\int_0^1\left(-x^2+x\right)dx+\int_1^2\left(x^2-x\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1+\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2=1$$

e) din **a)** avem $f(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x)e^x<0,\forall x\in[0;1]$; Înlocuind în Teorema de monotonie:

$$u(x)\ge v(x),\forall x\in[a;b]\Rightarrow\int_a^b u(x)dx\ge\int_a^b v(x)dx\Rightarrow\int_0^1 f(x)e^x dx\le\int_0^1 0dx=0$$

f) $\Gamma_g=\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1\left[-\left(-x^2+x-1\right)\right]dx=\int_0^1\left(x^2-x+1\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_0^1=\frac{5}{6}$