Soluție

1.a) Fie A matricea sistemului: $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rang} A=3$

Avem $\operatorname{rang}\overline{A}=3=\operatorname{rang}A$, deci sistemul este compatibil

b) Rezolvând sistemul obținem: $x_1=\dfrac{1+a-b-2\lambda}{2}$, $x_2=\dfrac{1-a-b-2\lambda}{2}$, $x_3=b+\lambda$, $x_4=\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$

Punând condițiile ca x_1, x_2, x_3, x_4 și x_1+x_2 să fie în progresie aritmetică, rezultă $a=b=-\dfrac{1}{18}$

c) Din $x_4>0 \Rightarrow \lambda>0$. Apoi, $x_2>0 \Rightarrow 1-a-b-2\lambda>0$, deci $1-a-b>2\lambda>0 \Rightarrow a+b<1$

2. a) $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=1-(x_1+x_2+x_3)+(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)-x_1x_2x_3=4.$

b) Presupunând că f are o rădăcină întreagă a, atunci a este divizor al termenului liber al polinomului, adică $a\in\{-1,1\}$. Cum nici 1, nici –1 nu este rădăcină a lui f, rezultă că f nu are rădăcini întregi.

c) $x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_2^2x_1+x_2^2x_3+x_3^2x_1+x_3^2x_2=(x_1+x_2+x_3)\left(x_1^2+x_2^2+x_3^3\right)-\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3\right).$

Avem $x_1+x_2+x_3=3$ și $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=-1$.

Avem $x_k^3-3x_k^2+5x_k+1=0$, $k=1,2,3$ și adunând, rezultă $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-21$.

În concluzie, $x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_2^2x_1+x_2^2x_3+x_3^2x_1+x_3^2x_2=18$.