Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) $m(\sigma)=4$.

b) Prin calcul direct rezultă $\sigma^5=e$, deci $A=\left\{e,\sigma,\sigma^2,\sigma^2,\sigma^3,\sigma^4\right\}$. A are 5 elemente.

c) $m(\sigma)=4\Rightarrow\varepsilon(\sigma)=+1\Rightarrow\ \varepsilon\left(\sigma^n\right)=(+1)^n=+1$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

2.a) Trebuie demonstrat că $f(x-T)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$

Pentru orice $x\in\mathbb{R}$ avem $f(x-T)=f((x-T)+T)=f(x)\Rightarrow -T\in H$.

b) Fie $T_1,T_2\in H\Rightarrow f\left(x+(T_1+T_2)\right)=f\left((x+T_1)+T_2\right)\overset{T_2\in H}{=}f(x+T_1)\overset{T_1\in H}{=}f(x)$, deci $T_1+T_2\in H$.

Dacă $T\in H$, atunci $-T\in H$, deci H este subgrup al lui $(\mathbb{R},+)$.

c) $\mathbb{Q}\subset H$ deoarece pentru orice $T\in\mathbb{Q}$ rezultă $x+T\in\mathbb{Q}$ dacă $x\in\mathbb{Q}$ şi $x+T\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dacă $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, deci $f(x+T)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Dacă $T\in H$, atunci presupunând $T\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, rezultă $x_0=1-T\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ şi $0=f(x_0)\neq f(x_0+T)=1$, contradicție; aşadar $T\in\mathbb{Q}$, deci $H\subset\mathbb{Q}$.

În concluzie, $H=\mathbb{Q}$.