Soluție.

1. a) Dacă negăm propoziția dată obținem propoziția "$(\exists y)\ (\forall x)\ 3x-y\neq 5$". Este evident că pentru $y=2\in\mathbb{Z}$, avem că $3x-2\neq 5$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$, deci negația propoziției date este adevărată, de unde obținem că propoziția dată inițial "$(\forall y)\ (\exists x)\ p(x;y)$" este falsă.

b) Avem că $a=63^7<64^7=2^{42}$ şi $b=\left(2^7+1\right)^7>\left(2^7\right)^7=2^{49}$, deci $a<b$.

2. Dacă q este rația progresiei avem că $b_1\left(1-q^4\right)=15$ şi $b_1\left(1-q^2\right)=12$, de unde obținem $1+q^2=\frac{15}{12}\Leftrightarrow q=\frac{1}{2}$ şi $b_1=16$. În final, $b_5=b_1-15=16-15=1$.

3. Avem 3 numere care se pot scrie folosind o singură cifră, şi anume, 333, 444, 555. Dacă se folosesc numai două cifre distincte *a* şi *b*, atunci cu ele se pot scrie 6 numere, şi anume, $\overline{baa}, \overline{aba}, \overline{aab}, \overline{abb}, \overline{bab}, \overline{bba}$. Prin urmare, avem $C_3^2\cdot 6=18$ numere care se pot scrie folosind numai două cifre distincte. Dacă se folosesc toate cifrele, atunci obținem $3!=6$ numere. Prin urmare, numărul numerelor de 3 cifre care se pot scrie numai cu cifrele 3, 4 şi 5 este egal cu $3+18+6=27$.

4. a) Avem că $f(-x)=|-x-1|+|-x+1|=|-(x+1)|+|-(x-1)|=|x+1|+|x-1|=f(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, de unde rezultă că f este pară.

b) Folosind inegalitatea $|a\pm b|\leq|a|+|b|$ pentru orice $a,b\in\mathbb{R}$ obținem $f(x)=|x-1|+|x+1|\geq|(x-1)-(x+1)|=2$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$ şi $f(0)=2$. Deci, $a=2$.