

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SOLUȚIE:

a) $f'(x) = \frac{1}{x} > 0, \forall x \in (0, \infty) \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(0, \infty)$

b) Fie $h: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - \frac{2(x-1)}{x+1}$. Atunci, $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} > 0, \forall x > 0$

$\Rightarrow h$ este crescătoare pe $(0, \infty)$;

Dar, $(1, \infty) \subset (0, \infty) \Rightarrow h$ este crescătoare pe $(1, \infty)$ Cum $h(1) = 0 \Rightarrow h(x) > 0, \forall x > 1$

$\Rightarrow f(x) > \frac{2(x-1)}{x+1}, \forall x > 1.$

c) $0 < x < y \Rightarrow \frac{y}{x} > 1, \ln\left(\frac{y}{x}\right) > \frac{2\left(\frac{y}{x} - 1\right)}{\frac{y}{x} + 1} \Rightarrow \ln \frac{y}{x} > \frac{2(y-x)}{y+x}$

d) f este strict crescătoare, $f(1) = 0, f(e^2) = 2 \Rightarrow x \in [1, e^2] \cap \mathbb{Z} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

e) $l_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + mx + n}{x^2} = 1, \forall m, n \in \mathbb{R} \quad l_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+2}{x^2} = 0 \Rightarrow l_1 - l_2 = -1$

f) Funcția g este continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow g$ este continuă în $x=0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = g(0) \Leftrightarrow n = 2$

și $m \in \mathbb{R}$.