Ministerul Educației, Cercetării şi Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum şi Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Solutii

a) Avem $\int_2^4 \frac{1}{x}dx = \ln 2$.

b) Avem $\int_1^e \ln x dx = 1$.

c) Deoarece $x \in [1, e]$ obținem că $x^n \le e^n$. Pentru $x \in [1, e]$ avem $0 \le \ln x \le 1$. Astfel obținem $x^n \cdot \ln x \le e^n \cdot \ln x$, pentru orice $x \in [1, e]$, şi $n \ge 1$.

d) $I_1 = \int_1^e x \cdot \ln x dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^2+1}{4}$.

e) $I_n = \int_1^e x^n \cdot \ln x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{n \cdot e^{n+1} + 1}{(n+1)^2}$.

f) Integrând inegalitatea de la punctul **c)** pe intervalul $[1, e]$, se obține $I_n \le e^n \int_1^e \ln x dx = e^n$.

Conform punctului **e)** $I_n = \frac{n \cdot e^{n+1} + 1}{(n+1)^2}$, iar de aici rezultă imediat inegalitatea.