Rezolvare

1. a) Se observă că $A^2 = O_2 \Rightarrow \det A^2 = 0.$

b) Fie $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ atunci din $X \cdot A = A \cdot X$ obținem: $x = t, z = 0$.

Notăm $x = a \in \mathbb{R}, y = b \in \mathbb{R} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$

c) $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \mathrm{Y} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ atunci din $Y^2 = O_2$ obținem $x^2 + yz = 0,\ t^2 + yz = 0,\ y(x+t) = 1$ şi $z(x+t) = 0.$ Se obține uşor o contradicție.

2. a) $\hat{a}$ este inversabil în $\mathbb{Z}_6$ dacă $(a,6) = 1.$ Deci avem 3elemente inversabile: $\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}.$

b) $\hat{2}x + \hat{1} = \hat{5} \Rightarrow x = \hat{2}$ şi $x = \hat{5}$. Atunci $S = \hat{1}$. $x^2 = x \Leftrightarrow x = \hat{0},\ x = \hat{1},\ x = 3,\ x = \hat{4}$. Atunci $P = \hat{0}$. $S + P = \hat{1}.$

c) $x^3 = \hat{0} \Leftrightarrow x = \hat{0}.\ P = \dfrac{1}{6}.$