Soluție

1.a) Se dezvoltă determinantul; se obține $\det A = 1 + a^2 + b^2 + c^2$.

b) $A \cdot A^* = \det A \cdot I_3 \Rightarrow \det A \cdot \det\left(A^*\right) = \left(\det A\right)^3 \Rightarrow \det A \cdot \det\left(A^*\right) = \left(\det A\right)^3$.

Cum $\det A \neq 0 \Rightarrow \det\left(A^*\right) = \left(\det A\right)^2$.

c) Avem $A - I_3 = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ba & b^2 & bc \\ ca & cb & c^2 \end{pmatrix}$ şi se observă că orice minor de ordin 2 al matricei *A* este nul. Ca urmare, rangul matricei $A - I_3$ este cel mult 1.

2.a) Dacă $f(x) = f(y) \Rightarrow ax = ay \Rightarrow a^{-1}(ax) = a^{-1}(ay) \Rightarrow x = y$, adică f este injectivă.

Pentru orice $y \in G$, considerând $x = a^{-1}y \in G$, rezultă $f(x) = y$, deci f este surjectivă.

b) $\left(f_a \circ f_b\right)(x) = a \cdot f_b(x) = a(bx) = (ab)x = f_{ab}(x), \forall x \in G$.

c) Compunerea funcțiilor este asociativă. Elementul neutru este $1_G = f_e \in \mathcal{F}(G)$, unde *e* este elementul neutru din *G*. Dacă a^{-1} este simetricul lui $a \in G$, atunci $f_{a^{-1}}$ este simetricul elementului $f_a \in \mathcal{F}(G)$.