Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) $f'(x)=\left((x-2)\ln x\right)'=(x-2)'\ln x+(x-2)(\ln x)'=\ln x+\dfrac{x-2}{x}, \forall x>0$.

b) Conform definiției derivatei (sau cu regula lui L'Hôspital) avem $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}f'(1)=-1$.

c) Funcția f' este crescătoare pe $(0,+\infty)\Leftrightarrow\left(f'(x)\right)'\geq 0, \forall x>0$, adică atunci când $f''(x)\geq 0, \forall x>0$.

Cum $f''(x)=\left(\ln x+\dfrac{x-2}{x}\right)'=(\ln x)'+\left(\dfrac{x-2}{x}\right)'=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{x+2}{x^2}>0, \forall x>0 \Rightarrow f \nearrow$ pe $(0,+\infty)$.

2. a) Deoarece $f'(x)=\left(\sqrt{x}+\ln x\right)'=\left(\sqrt{x}\right)'+(\ln x)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt{x}+2}{2x}=g(x), \forall x>0$,
rezultă că funcția f este o primitivă a funcției g.

b) $\displaystyle\int_1^4 f(x)\cdot g(x)dx=\int_1^4 f(x)\cdot f'(x)dx=\left.\frac{f^2(x)}{2}\right|_1^4=\frac{f^2(4)}{2}-\frac{f^2(1)}{2}=\frac{(2+\ln 4)^2-1}{2}$.

c) Avem succesiv: $\displaystyle\int_1^4 g(x)\cdot f''(x)dx=\int_1^4 g(x)\cdot g'(x)dx=\left.\frac{g^2(x)}{2}\right|_1^4=\frac{g^2(4)}{2}-\frac{g^2(1)}{2}=-1$.