

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 058

Se consideră funcția $f : (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{1-x^2}$.

- 5p** a) Să se determine numerele reale a și b pentru care $f(x) = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}, \forall x \in (-1,1)$.
- 5p** b) Să se determine ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f .
- 5p** c) Să se calculeze $f'(x), \forall x \in (-1,1)$.
- 5p** d) Să se studieze monotonia funcției f .
- 5p** e) Să se arate că $f(x) \geq 2, \forall x \in (-1,1)$.
- 5p** f) Să se studieze continuitatea funcției $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \min\{3x-1, 2x+3\}$.

Soluție

a) $\frac{2}{1-x^2} = \frac{x(a-b) + a+b}{1-x^2} \Rightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ a+b=2 \end{cases} \Rightarrow a=b=1$

b) $l_d(-1) = +\infty \Rightarrow x = -1$ asimptotă verticală
 $l_s(1) = +\infty \Rightarrow x = 1$ asimptotă verticală

c) $f'(x) = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$

d) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
 $x \in (-1,0] \Rightarrow f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ este descrescătoare
 $x \in [0,1) \Rightarrow f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ este crescătoare

e) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

x	-1				0				1
$f'(x)$		-	-	-	0	+	+	+	
$f(x)$	$+\infty$	\searrow		\searrow	2	\nearrow		\nearrow	$+\infty$

Din tabelul de variație al funcției rezultă $f(x) \geq 2, x \in (-1,1)$.

f) $g(x) = \begin{cases} 3x-1, x \leq 4 \\ 2x+3, x > 4 \end{cases}$

$$\left. \begin{aligned} l_s(4) &= \lim_{x \nearrow 4} g(x) = \lim_{x \nearrow 4} (3x-1) = 11 \\ l_d(4) &= \lim_{x \searrow 4} g(x) = \lim_{x \searrow 4} (2x+3) = 11 \\ g(4) &= 11 \end{aligned} \right\} \Rightarrow g \text{ este continuă în } x=4$$

$\Rightarrow g$ este continuă pe \mathbb{R} .