

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție :

a) $A + I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A + I_2) = 4$

b) $(A - I_2)(A + I_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $(A - I_2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$

d) $A^2 + xA + yI_2 = O_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+x+y & 2+x \\ 0 & 1+x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -2, y = 1$

e) Fie $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \Rightarrow AX = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ z & t \end{pmatrix}, XA = \begin{pmatrix} x & x+y \\ z & z+t \end{pmatrix}$

$$AX = XA \Rightarrow z = 0, t = x \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

f) $Y^2 = \begin{pmatrix} x^2 & 2xy \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x^2 & 2xy \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (x, y) \in \left\{ \left(1, \frac{1}{2} \right), \left(-1, -\frac{1}{2} \right) \right\}$$