

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluții

a) Se obține că $f(x) = x \Leftrightarrow x \cdot \ln x = x \Leftrightarrow x \cdot (\ln x - 1) = 0$. Rezultă că $\ln x = 1$ deci $x = e$ și $A = \{e\}$.

Mulțimea A este mărginită fiind finită.

b) Funcția f este continuă și are semn constant pe orice interval pe care nu se anulează. Ecuația $f(x) = 0$ este $x \cdot \ln x = 0$ și are soluția $x = 1$. Tabelul de semn este

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	- - - -	0	+ + + + + + + +

c) Se obține $\lim_{x \rightarrow e} \left(\frac{f(x) - 2e}{2x - e} \right) = \lim_{x \rightarrow e} \frac{x \ln x - 2e}{2x - e} = \frac{e \ln e - 2e}{e} = -1$

d) Avem $f(e-0) = a$ și $f(e+0) = f(a) = a \ln a$. Funcția este continuă în $x = e$ dacă $a \ln a = a$. Rezultă că $a = e$. Pentru $a = e$ funcția este continuă în $x = e$, iar pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{e\}$ funcția este discontinuă în $x = e$.

e) Funcția este derivabilă pe $x \in (0, +\infty)$ și $f'(x) = (x \ln x)' = \ln x + 1$.

f) Rezultă că $f'(e^k) = 1 + \ln e^k = 1 + k$. Se obține că $S = 2 + 3 + 4 + \dots + 2009 = \frac{2 + 2009}{2} \cdot 2008 = 1004 \cdot 2011$