Rezolvare

1. $A(0;-1)\in G_f \Leftrightarrow f(0)=-1,$ dar $f(0)=1\Rightarrow A\notin G_f$

$B(1;1)\in G_f \Leftrightarrow f(1)=1.$ Cum $f(1)=1\Rightarrow B\in G_f$

2.a. Funcţia de gradul II cu $a>0$ este strict crescătoare dacă $x\in\left[-\frac{b}{2a},\infty\right), -\frac{b}{2a}=2\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe intervalul $[2,\infty)$

2.b. Fie ecuaţia $y^2-Sy+P=0, y_1=5x_1, y_2=5x_2$ .Atunci $S=y_1+y_2=5(x_1+x_2)=5\cdot 4=20$ respective $P=y_1\cdot y_2=25x_1x_2=25\cdot 3=75.$ Ca urmare o ecuaţie care satisface cerinţa este $y^2-20y+75=0.$

3. Coordonatele vârfului parabolei associate sunt: $x_v=-\frac{b}{2a}; y_v=-\frac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow x_v=-\frac{1}{2}; y_v=\frac{4a-1}{4}$

Vârful parabolei va fi pe dreapta dată dacă $\frac{4a-1}{4}=1-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow a=\frac{9}{4}$.

4.a. Condiţiile de existenţă sunt: $\begin{cases}2x+3\geq 0\\ x+1\geq 0\end{cases}$.

$\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}=1\Leftrightarrow\sqrt{2x+1}=1+\sqrt{x+1}\Leftrightarrow x+1=2\sqrt{x+1}$

$\Rightarrow x^2+2x+1=4(x+1)\Leftrightarrow(x+1)(x-3)=0\Leftrightarrow x=-1; x=3$.

Ambelevalori verifică ecuaţia deci $\mathbb{S}=\{-1;3\}$

4.b. Dacă $x-1\neq 1$ atunci ecuaţia este echivalentă cu

$x^2-3x=8x-30\Leftrightarrow x^2-11x+30=0\Leftrightarrow x_1=5; x_2=6;$ şi $5;6\in\mathbb{Z}$

Dacă $x-1=1\Leftrightarrow x=2$ atunci ecuaţia devine $1^{-2}=1^{-14}$ adevărat $\Rightarrow x=2$ soluţie.

Deci $\mathbb{S}=\{2;5;6\}$