Soluție

1. a) Se arată că $\det\left(A - xI_2\right) = 0 \iff x \in \{1, 4\}$.

b) Calcul direct.

c) Fie $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, o soluție a ecuației. Atunci, $A \cdot Y = Y \cdot A$.

Din **b)** rezultă că există $x, y \in \mathbb{C}$, astfel încât $Y = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$. Obținem $\begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \end{cases}$, deci există 4 soluții în $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. a) Se arată că $f_{-1,2} \circ f_{-1,2} = f_{1,0}$.

b) Se arată că operația de compunere este lege de compoziție pe G. Se verifică axiomele grupului. Se demonstrează că elementul neutru este funcția identică, $f_{1,0}$, iar pentru funcția $f_{a,b} \in G$, simetrica sa este $f_{a',b'} \in G$, unde $a' = \dfrac{1}{a}$ și $b' = -\dfrac{b}{a}$.

c) $f_{1,1}(x) = x + 1$, $\left(f_{1,1} \circ f_{1,1}\right)(x) = x + 2$ și inductiv se obține $\underbrace{\left(f_{1,1} \circ f_{1,1} \circ \ldots \circ f_{1,1}\right)}_{\text{de } n \text{ ori } f_{1,1}}(x) = x + n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$,

așadar $\underbrace{\left(f_{1,1} \circ f_{1,1} \circ \ldots \circ f_{1,1}\right)}_{\text{de 2008 ori } f_{1,1}}(x) = x + 2008$.