

**Soluție**

1. a) Calcul direct. Se obține  $a = 3$ .
- b)  $A^{10} = 3^9 \cdot A$ , deci  $\text{rang}(A^{10}) = 1$ .
- c)  $B = A - A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Se obține  $B^{2008} = I_2$ .
2. a) Pentru  $a, b \in M$ , avem  $e^a + e^b - 1 \geq 1$ , deci  $a * b \in [0, \infty) = M$ .
- b) Pentru  $a, b, c \in M$  se demonstrează că  $(a * b) * c = a * (b * c) = \ln(e^a + e^b + e^c - 2)$ .
- c) Se demonstrează prin inducție că  $\underbrace{a * a * \dots * a}_{de\ n\ ori\ a} = \ln(n \cdot e^a - (n - 1))$ .
- Se obțin apoi soluțiile  $a = 0$  și  $a = \ln(n - 1)$ .