Soluție

1. Fie z numărul din enunț. Avem $z=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^6=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^6$. Folosind formula lui Moivre, obținem: $z=\cos\pi+i\sin\pi=-1 \Rightarrow \mathrm{Re}(z)=-1$.

2. $(f\circ f)(512)=f\left(f(512)\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{f(512)}}=\sqrt[9]{512}=\sqrt[9]{2^9}=2$.

3. Utilizând formula $\cos 2x=1-2\sin^2 x$, ecuația devine $2\sin^2 x-\sin x-1=0$. Notăm $y=\sin x$ şi obținem ecuația $2y^2-y-1=0$ cu soluțiile $-\frac{1}{2}$ şi 1.

$\sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, iar $\sin x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

4. Fiecare submulțime cu trei elemente a lui M poate fi ordonată strict crescător într-un singur mod. Numărul tripletelor (a,b,c) cu proprietatea că $a,b,c\in M$ şi $a<b<c$ este egal cu numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii M, adică $C_7^3=35$.

5. Fie $d_1: x+2y-6=0$ şi $d_2: 2x+4y-11=0$. Deoarece $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}\neq\frac{-6}{-11} \Rightarrow d_1 \parallel d_2$. Punctul $A(0,\ 3)$ se află pe dreapta d_1. Atunci distanța cerută este $\mathrm{d}(d_1,\ d_2)=\mathrm{d}(A,\ d_2)=\frac{|2\cdot 0+4\cdot 3-11|}{\sqrt{2^2+4^2}}=\frac{1}{\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{5}}{10}$.

6. Avem $\overrightarrow{AD}^2=\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2=4$, iar $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AD}\right\|\cdot\cos 60^\circ=1$.

Atunci $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}^2 \Rightarrow \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=5$.