Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) Sistemul are soluție unică dacă determinatul matricei A a sistemului este nenul. Cum $\det A = m^2 - 6m + 5,$ sistemul are soluție unică pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{1,5\}$.

b) Pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{1,5\}$ sistemul este compatibil determinat

Pentru $m = 1,$ $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = 2,$ adică sistemul este compatibil nedeterminat

Pentru $m = 5$ rezultă $\operatorname{rang} A = 2$ şi $\operatorname{rang} \overline{A} = 3,$ deci sistemul este incompatibil

c) Pentru $m = 1$ se obține soluția $x = 1 - \alpha,\ y = \alpha,\ z = 0,$ unde $\alpha \in \mathbb{R}$. Înlocuind în relația $2x_0^2 - y_0^2 + 3z_0^2 = 14,$ rezultă $\alpha \in \{-2, 6\}$. Soluțiile căutate sunt $(3, -2, 0)$ și $(-5, 6, 0)$.

2.a) $\frac{2}{3} * \frac{3}{4} = \left\{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right\} = \frac{5}{12}$.

b) Comutativitatea este imediată. Asociativitatea: folosind relația $\{x + n\} = \{x\}$, $\forall\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}$, rezultă:

$(x * y) * z = \{x * y + z\} = \{\{x + y\} + z\} = \{x + y - [x + y] + z\} = \{x + y + z\}$

$x * (y * z) = \{x + y * z\} = \{x + \{y + z\}\} = \{x + y + z - [y + z]\} = \{x + y + z\}$.

Elementul neutru este $e = 0,$ simetricul lui 0 este 0, iar simetricul oricărui element $x \in (0,1)$ este $1 - x$.

c) Ecuația se poate scrie sub forma $\{3x\} = \frac{1}{2}$. Cum $0 \le 3x < 3,$ rezultă $3x \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\} \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right\}$.