

Soluție

1.a) $f'(x) = \frac{1}{x} + x.$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 2.$

c) $f''(x) = \frac{-1 + x^2}{x^2}; f''(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -1.$ Din tabelul de variație \Rightarrow

Pentru $x \in (0, 1)$ f este concavă; pentru $x \in (1, \infty)$ f este convexă.

2.a) Pentru $n = 2 \Rightarrow \int_1^2 (1+x)^2 dx = \frac{(1+x)^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{19}{3}.$

b) Pentru $n = -1 \Rightarrow \int_0^a (1+x)^{-1} dx = \ln|1+x| \Big|_0^a = 0 \Leftrightarrow |1+a| = 1 \Rightarrow a_1 = 0, a_2 = -2.$

c) $\int_{-1}^1 f'(x) \cdot f(x) dx = f(x) \cdot f(x) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 f(x) \cdot f'(x) dx =$
 $= \frac{1}{2} f^2(x) \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} (1+x)^{2n} \Big|_{-1}^1 = \frac{2^{2n}}{2} = 2^{2n-1}.$