

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $x * y = (x+1)(y+1) - 1, \forall x, y \in \mathbb{Z}$

$(x * y) * z = (x+1)(y+1)(z+1) - 1 = x * (y * z), \forall x, y, z \in \mathbb{Z}$

b) $(x+1)(e+1) - 1 = x, \forall x \in \mathbb{Z} \Rightarrow e = 0$ element neutru pe \mathbb{Z}

c) $x * x' = 0 \Rightarrow (x+1)(x'+1) = 1 \Rightarrow x' = \frac{1}{x+1} - 1, \forall x \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$

Dar $x' \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x+1) \mid 1 \Rightarrow x \in \{0, -2\}$

d)
$$\left. \begin{array}{l} 3^x * 3^{x+1} = 7 \Rightarrow (3^x + 1)(3^{x+1} + 1) = 8 \\ 3^x = t > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (t+1)(3t+1) = 8$$

$3t^2 + 4t - 7 = 0 \Rightarrow t \in \left\{-\frac{7}{3}, 1\right\} \Rightarrow 3^x = 1 \Rightarrow x = 0$

e) Se demonstrează că $x * (-1) = (-1) * x = -1, \forall x \in \mathbb{Z}$

Deci $0 * (-1) * (-2) * \dots * (-13) = -1$

f) $(x+1)(y+1) = 2 \Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c|c} x+1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ \hline y+1 & 2 & 1 & -2 & -1 \end{array}$

Deci $(x, y) \in \{(0, 1); (1, 0); (-2, -3); (-3, -2)\}$