Rezolvare

a) Se demonstrează că $\forall x = 2^n \in M, \forall y = 2^m \in M \quad x \cdot y = 2^n \cdot 2^m \in M \Leftrightarrow 2^{n+m} \in M$ adevărat pentru că $n+m \in \mathbb{Z}$

b) Deoarece înmulțirea numerelor întregi este asociativă şi comutativă şi admite element neutru pe 1 şi deoarece M este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu înmulțirea şi $1 = 2^0 \in M$ obținem că $(M,\cdot)$ este o structură algebrică comutativă, asociativă şi cu 1 element neutru.

Se demonstrează că $\forall x = 2^n \in M \quad \exists x' \in M$ a.î. $x \cdot x' = x' \cdot x = 1$

Se obține $x' = \dfrac{1}{2^n} = 2^{-n} \in M$

Deci $(M,\cdot)$ este grup comutativ.

c) Se demonstrează că $\forall x = n^2, y = m^2 \in P \quad x \cdot y = n^2 \cdot m^2 \in P \Leftrightarrow (n.m)^2 \in P$ adevărat pentru că $n \cdot m \in \mathbb{Z}$

d) Deoarece înmulțirea numerelor raționale este asociativă şi comutativă şi admite element neutru pe 1 şi deoarece M este parte stabilă a lui $\mathbb{Q}$ în raport cu înmulțirea şi $1 = 1^2 \in P$ obținem că $(P,\cdot)$ este o structură algebrică comutativă, asociativă şi cu 1 element neutru.

Fie $x = n^2 \in P$ x este inversabil $\Leftrightarrow \exists x' \in N$ a.î. $x \cdot x' = x' \cdot x = 1$

Obținem $x' = \dfrac{1}{n^2} = \left(\dfrac{1}{n}\right) \in P \Leftrightarrow \dfrac{1}{n} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = \pm 1$

Deci mulțimea elementelor inversabile ale lui P este $\{\pm 1\}$

e) Se demonstrează că $2^k \cdot 2^{k+1} \cdot 2^{k+2} \cdot 2^{k+3} \in P \ \forall k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \ 2^{4k+6} = \left(2^{2k+3}\right)^2 \in P$

adevărat pentru că $2^{2k+3} \in \mathbb{Z}$

f) Se demonstrează că $\exists n = 2 \in \mathbb{Z}$ a.î. $2^n = n^2$ deci $M \cap N \neq \varnothing$ pentru că $2^2 \in M$ şi $2^2 \in P$