Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

a) Aducând la numitor comun în membrul drept obținem: $\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}=\frac{a(x+1)+bx}{x(x+1)}=\frac{(a+b)x+a}{x(x+1)}$.

Egalând coeficienții rezultă: $\begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \end{cases}$, iar de aici obținem $a=1$ și $b=-1$.

b) Avem $I_1=\int_0^1 x\cdot e^x dx = x\cdot e^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x dx=e-e+1=1$.

c) Avem $\int_1^2\left(\frac{1}{x+1}+f(x)\right)dx=\ln 2$.

d) Cum $F'(x)=f(x)>0, \forall x>0$, primitiva este strict crescătoare și deci $F\left(\sqrt[3]{3}\right)<F\left(\sqrt[3]{5}\right)$.

e) Avem $I_n=\int_0^1 x^n\cdot e^x dx=x^n\cdot e^x\Big|_0^1-n\int_0^1 x^{n-1}\cdot e^x dx=e-n\cdot I_{n-1}$.

f) Deoarece $x^n\ge x^{n+1}$, pentru orice $x\in[0,1]$ deducem că și $x^n\cdot e^x\ge x^{n+1}\cdot e^x$, adică $I_n\ge I_{n+1}$ sau $I_{n-1}\ge I_n$.
Astfel $e=I_n+nI_{n-1}\ge I_n+nI_n=(n+1)\cdot I_n$.