Rezolvare

1. $G_f \cap G_g = \{(2; y)\}$ dacă $f(2) = g(2) \Leftrightarrow m - 2 = 4 - 1 \Leftrightarrow m = 5.$

2.a. Dacă $m = 1$ atunci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - x + 1.$

Coordonatele vărfului $x_v = \frac{1}{2}, y_v = \frac{3}{4}.$ Punctul $V\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$ este situat în cadranul I al sistemului de axe.

2.b. $x_1^3 + x_2^3 = -2m \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = -2m.$

Aplicând formulele lui Viete avem $m^3 - 3m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow m\left(m^2 - 3m + 2\right) = 0.$ Soluțiile acestei ecuații sunt numerele întregi 0;1;2.

3. $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}.$

$\Delta = 9(m+2)^2 - 8(m+2) \leq 0 \Leftrightarrow (m+2)(9m+10) \leq 0 \Leftrightarrow m \in \left[-2; -\frac{10}{9}\right].$ Dar $m \in \mathbb{Z}$ atunci $\mathbb{S} = \{-2\}.$

4.a. $2^{2x} - \frac{13}{6} 2^x 3^x + 3^{2x} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - \frac{13}{6} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 1 = 0.$

Notăm $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t, t > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ atunci ecuația devine $6t^2 - 13t + 6 = 0$ cu $t_1 = \frac{3}{2}$ și $t_2 = \frac{2}{3}$

Înlocuind obținem soluțiile $x_1 = 1$ și $x_2 = -1.$

4.b. Condițiile de existență sunt: $\begin{cases} 2x + 3 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases}.$

$\sqrt{2x+3} = 1 + \sqrt{x+1} \Leftrightarrow x + 1 = 2\sqrt{x+1} \Rightarrow (x+1)^2 = 4(x+1) \Leftrightarrow x = -1$ sau $x = 3.$

Ambele valori verifică ecuația ,deci $\mathbb{S} = \{-1; 3\}.$