Soluție

1. a) Calcul direct.
b) Pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2,1\}$ sistemul este de tip Cramer, cu unica soluție $x=0$, $y=0$, $z=1$, care nu verifică ecuația (C).
c) Pentru $a=-2$, din sistem rezultă $x=y=z-1$.
Folosind ecuația (C), găsim soluțiile $\begin{cases} x=y=1+\sqrt{2} \\ z=2+\sqrt{2} \end{cases}$ şi $\begin{cases} x=y=1-\sqrt{2} \\ z=2-\sqrt{2} \end{cases}$.
Pentru $a=1$, sistemul devine $x+y+z=1$, cu soluțiile $\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \\ z=1-\alpha-\beta \end{cases}$ şi cum $\alpha^2+\beta^2=(1-\alpha-\beta)^2$ pentru mai mult de două numere reale, $a=1$ nu e soluție.

2. a) Pentru $a=19 \in \mathbb{Q}$, $b=6 \in \mathbb{Q}$, avem $a^2-10b^2=1$, deci $A=\begin{pmatrix} 19 & 10\cdot 6 \\ 6 & 19 \end{pmatrix} \in G$.
b) Pentru $X=\begin{pmatrix} a & 10b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$ şi $Y=\begin{pmatrix} a' & 10b' \\ b' & a' \end{pmatrix} \in G$, avem $XY=\begin{pmatrix} a'' & 10b'' \\ b'' & a'' \end{pmatrix}$, unde
$a''=a\cdot a'+10b\cdot b' \in \mathbb{Q}$ şi $b''=b\cdot a'+a\cdot b' \in \mathbb{Q}$ şi $\det(XY)=\det(X)\det(Y)=1$.
c) Se arată inductiv că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există $a_n, b_n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $A^n=\begin{pmatrix} a_n & 10\cdot b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix} \in G$.
Cum $b_n>0$, rezultă că $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $A^n \neq I_2$ și apoi că puterile matricei A sunt o infinitate de elemente distincte ale grupului $(G,\cdot)$.