

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) Se arată prin calcul direct.

b) Se demonstrează că

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) = xyz - 2007xz - 2007yz - 2007xy - 2007^2x - 2007^2y - 2007^2z + 2007 \cdot 2008$$

c) Utilizând proprietatea de asociativitate a legii de compoziție \circ obținem:

$$(2008 \circ 2008) \circ (2008 \circ 2008) = 2008 \circ 2008 = 2008$$

d) Determinăm dacă $\exists e \in \mathbb{R}$ astfel încât $x \circ e = e \circ x = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Existența elementului e se determină din faptul că $x \circ e = x, \forall x \in \mathbb{R}$ de unde se obține că $e = 2008$.

Apartenența lui e la \mathbb{R} este evidentă: $2008 \in \mathbb{R}$.

Se demonstrează că legea \circ este comutativă pe \mathbb{R} adică $x \circ y = y \circ x, \forall x, y \in \mathbb{R}$

Deci $\exists e = 2008 \in \mathbb{R}$ astfel încât $x * e = e * x = x, \forall x \in \mathbb{R}$

e) $\forall x, y \in H, x \circ y \geq 2007 \Leftrightarrow \forall x, y \in H, xy - 2007(x + y) + 2007 \cdot 2008 \geq 2007 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x, y \in H, (x - 2007)(y - 2007) \geq 0$ adevărat.

f) Ecuația devine $x^2 - x(1 + 2 \cdot 2007) + 2 \cdot 2007 = 0$ ce are mulțimea soluțiilor $\{1; 4014\}$