

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție:

1. a) $\det(A^2 + B^2) = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -15.$

b) Se arată prin calcul direct.

c) Dacă $X, Y \in M_2(\mathbb{C})$ și $X \cdot Y = Y \cdot X$, atunci

$$\det(X^2 + Y^2) = \det((X + i \cdot Y)(X - i \cdot Y)) \stackrel{b)}{=} \det(X + i \cdot Y) \cdot \det(X - i \cdot Y).$$

Mai mult, $X - i \cdot Y = \overline{X + i \cdot Y}$, deci $\det(X^2 + Y^2) = |\det(X + i \cdot Y)|^2 \geq 0.$

2. a) Se folosește definiția elementului neutru.

b) Deoarece $\begin{cases} f(3) = 0 \\ f(4) = 1 \end{cases}$, obținem $\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases}$ și se verifică apoi faptul că funcția $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$,
 $f(x) = x - 3$ este izomorfismul căutat.

c) Se demonstrează prin inducție că $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de 2008 ori } x} = (x - 3)^{2008} + 3.$

Se obțin apoi soluțiile $x = 1$ și $x = 5.$