Rezolvare

1) **a)** $f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \Rightarrow f''(x) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x^2\sqrt{x}} > 0 \Rightarrow f'$ este strict ctescătoare.

b) Se poate demonstra prin calcul sau aplicând Teorema lui Lagrange.

c) Se adună relațiile de la (**b**) de la $k = 1$ până la $k = n$ şi astfel se obține marginea şirului $(a_n)_{n\geq 1}$. Şirul este evident crescător, deci va fi convergent conform Teoremei lui Weierstrass.

2) **a)** $f_1(x) = \int_0^1 t \cdot \operatorname{arctg} t = \frac{t^2}{2} \cdot \operatorname{arctg} t \Big|_0^x - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} x.$

b) $f_n(1) = \int_0^1 t^n \cdot \operatorname{arctg} t \, dt \leq \frac{\pi}{4} \cdot \int_0^1 t^n dt = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{n+1}.$

c) $f_n(1) = \int_0^1 \left(\frac{t^{n+1}}{n+1}\right)' \cdot \operatorname{arctg} t \, dt = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{t^2+1} dt.$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{t^2+1} dt = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} n \cdot f_n(1) = \frac{\pi}{4}.$