Rezolvare

a) Se demonstrează că $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \left(x * y\right) * z = x * \left(y * z\right) = xyz + xz + yz + xy + x + y + z$

b) $x * \left(-1\right) = \dfrac{-x + x - 1 - 1}{2} = \left(-1\right) \quad , \forall x \in \mathbb{R}$.

c) Deoarece $x * \left(-1\right) = \left(-1\right) * x = \left(-1\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, și legea $*$ este asociativă pe $\mathbb{R}$, obținem:

$$\left[\underbrace{\left(-2008\right) * \left(-2007\right) * ... * \left(-2\right)}_{x}\right] * \left(-1\right) * \left[\underbrace{0 * 1 ... * 2007 * 2008}_{y}\right] =$$

$$= x * \left(-1\right) * y = \left(x * \left(-1\right)\right) * y = \left(-1\right) * y = -1$$

d) Se demonstrează că $\exists e \in \mathbb{R}$ a.î. $x * e = e * x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Existența elementului e se determină din faptul că $x * e = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, de unde se obține ca $e = 1$

Apartenența lui e la $\mathbb{R}$ este evidentă.

Se demonstrează comutativitatea legii $*$ și deci $\exists e = 1 \in \mathbb{R}$ a.î. $x * e = e * x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Fie $x \in \mathbb{R}$. x este simetrizabil $\Leftrightarrow \exists x' \in \mathbb{R}$ a..î. $x * x' = x' * x = 1$

Din $x * x' = 1$ obținem $x' = \dfrac{3 - x}{x + 1} \in \mathbb{R}$ doar pentru $x \neq -1$

Deci toate elementele din $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ sunt simetrizabile.

e) Întocmind tabla legii de compoziție "$\circ$" pe mulțimea H obținem în interiorul acesteia doar elementele lui H. Deci $\forall x, y \in H \Rightarrow x \ o \ y \in H$

f) Din tablă obținem elementul neutru $e = 1$ și faptul că 0 și 1 sunt simetrizabile în raport cu legea "$\circ$" simetricele lor fiind 0 respectiv 1.