Soluție

1.

a) $x>0 \Rightarrow x+\frac{1}{x} \geq 2 \cdot \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}=2 \quad \Rightarrow x+\frac{1}{x} \geq 2$ pentru orice $x \in (0,\infty)$.

b) $a \in (0,1), \log_a\left(x^2+2\right) \geq 2, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2+2 \leq a^2$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ nu are soluție .

$a \in (1,\infty), x^2+2 \geq a^2$ pentru orice $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a^2-2 \leq 0 \Leftrightarrow a \in \left(1,\sqrt{2}\right]$.

2. $a_n=S_n-S_{n-1}=2n+1, \forall n \geq 2$.

$a_1=S_1=3, a_1=2 \cdot 1+1$ şi verificarea $a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

3. $f:\mathbb{N}^* \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, f(n)=(n-2)!$ strict crescătoare şi $f(7)=5!=120 \Rightarrow n \in \{2,3,4,5,6,7\}$

4.

a) $f(-x)=-f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi pentru $x=0 \Rightarrow f(0)=0$

b) Folosirea imparității şi calcule $\Rightarrow$ *Suma* este 0 .