Soluție

1. a) Se arată că $rang\,(A) = 1$.

b) Se arată că $A^2 = d \cdot A$, cu $d = a + 2b + 3c$.

c) Se verifică că pentru $K = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ și $L = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$, avem $A = K \cdot L$.

2. a) Calcul direct.

b) Rădăcinile ecuației $t^2 - 4t + 16 = 0$ sunt $t_{1,\,2} = 2 \pm 2\sqrt{3} \cdot i$.

Mulțimea rădăcinilor lui f este $\left\{\sqrt{3} + i, \sqrt{3} - i, -\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} - i\right\}$.

c) Singura descompunere în factori a polinomului, în $\mathbb{R}[X]$, este $f = \left(X^2 - 2\sqrt{3}X + 4\right)\left(X^2 + 2\sqrt{3}X + 4\right)$.

Nici unul dintre polinoamele $X^2 - 2\sqrt{3}X + 4$ și $X^2 + 2\sqrt{3}X + 4$ nu poate fi descompus în $\mathbb{Q}[X]$.