Soluție

1. a) Avem: $f'(x)=3x^2-3$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x\in\{-1,1\}$ şi următorul tabel de variație al funcției *f*:

Din tabelul de variație rezultă că -1 şi 1 sunt punctele de extrem ale funcției *f*.

b) Deoarece f este continuă, $f(1)=-2$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$ rezultă că ecuația are soluție în mulțimea $(1,\infty)$. Cum *f* este strict crescătoare pe $(1,\infty)$, rezultă că f este injectivă pe $(1,\infty)$. Deoarece f este injectivă, soluția este unică.

c) Deoarece $g(x)=f^2(x)=x^6-6x^4+9x^2$, rezultă $g'(x)=6x^5-24x^3+18x$, de unde $g''(x)=30x^4-24x^2+18$.

Pentru a rezolva ecuația $g''(x)=0$, notăm $x^2=t$ şi rezultă $12\left(5t^2-6t+1\right)=0$ care are soluțiile $t_1=\frac{1}{5}$ şi $t_2=1$. Deci ecuația are soluțiile $-1,-\frac{1}{\sqrt5},\frac{1}{\sqrt5},1$. Ținând cont de semnul funcției g'', rezultă că *g* are patru puncte de inflexiune.

x	$-\infty$		-1		1		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	- 2	$\nearrow$	∞

2.a) $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x)=\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)=f(0$
continuă în 0. Rezultă f este conti
$\mathbb{R}$.
f continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admite prim
$\mathbb{R}$.

b) $\int xe^x dx=e^x(x-1)+C$, iar $\int \sin x dx=-\cos x+C$.

Deci o primitivă a funcției f va fi de forma: $F(x)=\begin{cases} e^x(x-1)+c_1, & x\le 0 \\ -\cos x+c_2, & x>0 \end{cases}$.

Din condiția de continuitate a lui *F* rezultă $c_1=c_2=c$.

c) Deoarece *F* este o primitivă a lui *f*, rezultă $\int_0^x f(t)\,dt=F(x)-F(0)$, deci limita de calculat este

$\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{F(x)-F(0)}{x^2}$. Cu regula lui l´Hôspital : $\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{F(x)-F(0)}{x^2}=\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{F'(x)}{2x}$.

Apoi $\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{F'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{f(x)}{2x}=\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}$.