Soluție:

1.a) f continuă $\Leftrightarrow\ l_s(0)=l_d(0)=f(0)$; $l_s(0)=1=f(0)$, $l_d(0)=1\ \Rightarrow\ f$ este continuă în $x=0$.

b) $x\in(-\infty,0]$; $f'(x)=\dfrac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}$; $f'(x)\geq 0$ oricare ar fi $x\in(-\infty,0]\Rightarrow\ f$ crescătoare pe $(-\infty\ ,\ 0]$.

c) $f(-1)=\dfrac{1}{2}\ \Rightarrow A\in G_f$; ecuația tangentei este: $y-f(-1)=f'(-1)(x+1)$;

$f'(-1)=\dfrac{1}{2}\ \Rightarrow y-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}(x+1)$ este ecuația tangentei.

2.a) $f_1\left(\sqrt{x-1}\right)=\dfrac{1}{x}\Rightarrow\displaystyle\int_1^e\frac{1}{x}=\ln x\Big|_1^e=\ln e-\ln 1=1$ c.c.t.d.

Pentru punctul **2. b)** propun:Să se determine primitiva G a funcției

$g(x)=\dfrac{1}{f_2(x)}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$, care verifică relația $G(1)=\dfrac{13}{15}$. **Soluție:**

$$f_2(x)=\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}\Rightarrow g(x)=\left(x^2+1\right)^2=x^4+2x^2+1;\int g(x)\,dx=\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x+c.$$

O primitivă este $G(x)=\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{2x^3}{3}+x+c$; $G(1)=\dfrac{13}{15}\Leftrightarrow\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{3}+1+c=\dfrac{13}{15}\Leftrightarrow c=-1.$

Pentru punctul **2. c)** propun: Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 x\cdot f_n(x)\,dx$, unde $n>1$. **Soluție:**

$$\int_0^1 x\,f_n(x)\,dx=\int_0^1\frac{x}{\left(x^2+1\right)^n}\,dx=\int_1^2\frac{1}{t^n}\cdot\frac{1}{2}\,dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-n+1}}{-n+1}\Bigg|_1^2=\frac{1}{2(1-n)}\left(\frac{1}{2^{n-1}}-1\right).$$