Rezolvare

1) **a)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{6}-\frac{\sin x}{x^3}\right)=+\infty.$

b) $f'(x)=1-\frac{x^2}{2}-\cos x;\quad f''(x)=-x+\sin x.$

c) $f'''(x)=-1+\cos x\le 0\Rightarrow f''$ este strict descrescătoare

$\Rightarrow f''(x)\le f''(0),\ \forall x\ge 0\to f''(x)\le 0\to$

$\to f'$ este strict descrescătoare $\to f'(x)\le f'(0),\ \forall x\ge 0$

$f'(x)\le 0\to f$ este strict descrescătoare pe intervalul $[0,+\infty)$ şi $f(0)=0\to f(x)\le 0,\ \forall x\ge 0.$

2) **a)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx=\left(\sin x-x+\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=1-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^3}{48}.$

b) $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x-x+\frac{x^2}{6}}{x^2}=+\infty.$

c) $f'(x)=-\sin x+x;\ f''(x)=1-\cos x\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe intervalul $[0,+\infty)\to$

$\to\cos x^2-1+\frac{x^4}{2}\ge 0\to\cos x^2\ge 1-\frac{x^4}{2}\to\int_0^1\cos\left(x^2\right)dx\ge\frac{9}{10}.$