Soluție

1. a) $f'(x)=\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)'==\dfrac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{x}\right)-\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1-\sqrt{x}\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}=-\dfrac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$, $\forall x>0$..

b) Avem $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \underset{L'H}{\overset{\frac{-\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(1-\sqrt{x}\right)'}{\left(1+\sqrt{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=-1\Rightarrow$ că dreapta $y=-1$ este asimptotă orizontală la G_f către $+\infty$.

c) $\sqrt{x}\cdot f'(x)\le f(x)\Leftrightarrow\sqrt{x}\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}\right)\le\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\Leftrightarrow -1\le\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{x}\right)\Leftrightarrow x\le 2$, adev. $\forall x\in(0,2]$.

2. a) $F'(x)=\left(e^x+x^3+2x-1\right)'=\left(e^x\right)'+\left(x^3\right)'+\left(2x\right)'-1'=e^x+3x^2+2=f(x),\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow F$ este o primitivă a funcției f.

b) Avem $\int_0^1 f(x)\cdot F(x)\,dx=\int_0^1 F'(x)\cdot F(x)\,dx=\left.\dfrac{F^2(x)}{2}\right|_0^1=\dfrac{F^2(1)}{2}-\dfrac{F^2(0)}{2}=\dfrac{(e+2)^2}{2}$. $F'(x)=f(x)$

c) Ținând cont că F este primitivă a lui f obținem $xf(x)+F(x)=xF'(x)+F(x)=\left(x\cdot F(x)\right)'$.

Deci $\int_0^1\left(xf(x)+F(x)\right)dx=\int_0^1\left(xF(x)\right)'dx=xF(x)\Big|_0^1=F(1)$.