Soluție

1. Avem $100^{\lg 2}+\sqrt[3]{-27}=\left(10^{\lg 2}\right)^2+\sqrt[3]{(-3)^3}=2^2+(-3)=1$.

2. $\operatorname{Im}(f)=\left\{y\in\mathbb{R}\ /\ \exists x\in\mathbb{R}\text{ așa încât } f(x)=y\right\}$.

Pentru $y=0$ avem $f(0)=0$, iar pentru $y\neq 0$ avem: $f(x)=y \Leftrightarrow yx^2-2x+y=0$. Această ecuație are soluții reale dacă şi numai dacă $\Delta\geq 0 \Leftrightarrow 4-4y^2\geq 0$, adică $y\in[-1;\ 1]$. În concluzie, $\operatorname{Im}(f)=[-1;\ 1]$.

3. Notând $3^x=y$ ecuația devine: $3y=-y+8$ de unde obținem $y=2$. Avem $3^x=2 \Leftrightarrow x=\log_3 2$.

4. O funcție $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4\}$ cu proprietatea $f(1)=f(3)$ este unic determinată de un tabel de tipul

x	1	2	3	4
$f(x)$	a	b	a	c

unde $a,b,c\in\{1,2,3,4\}$.

Vor fi $4^3=64$ funcții cu proprietatea cerută.

5. Fie d drepta ce trece prin $O(0,\ 0)$ şi este paralelă cu dreapta AB.

Un vector director al dreptei d este $\overrightarrow{AB}=-3\vec{i}+2\vec{j}$. Ecuația dreptei d este $\frac{x}{-3}=\frac{y}{2} \Leftrightarrow 2x+3y=0$.

6. Ridicând la pătrat cele două egalități din ipoteză, se obțin relațiile :

$\cos^2 a+\cos^2 b+2\cos a\cos b=\frac{1}{4}$ şi $\sin^2 a+\sin^2 b+2\sin a\sin b=1$. Adunând membru cu membru aceste două egalități obținem $2+2(\cos a\cos b+\sin a\sin b)=\frac{4}{3}$, adică $2+2\cos(a-b)=\frac{4}{3}$ de unde rezultă $\cos(a-b)=-\frac{1}{3}$.