Rezolvare:

a. $A = M + 3a \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} + 3a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3a & -2 \\ 8 & -4+3a \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} 4+3a & -2 \\ 8 & -4+3a \end{pmatrix}$, atunci $\det A = (3a-4)(3a+4) + 16 = 9a^2 - 16 + 16 = 9a^2$ de unde se obține ecuația $9a^2 = 9 \Leftrightarrow a_1 = -1, a_2 = 1$.

c. $A = \begin{pmatrix} 4+3a & -2 \\ 8 & -4+3a \end{pmatrix}$, $\det A = 9a^2$ şi cum $a \neq 0$ matricea A este inversabilă. Calculăm matricea adjunctă $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a-4 & 2 \\ -8 & 3a+4 \end{pmatrix}$, atunci $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \frac{1}{9a^2} \begin{pmatrix} 3a-4 & 2 \\ -8 & 3a+4 \end{pmatrix}$.

d. Pentru $a = \frac{1}{3}$ matricea devine $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $\det A = 1 \neq 0$, A este inversabilă şi vom obține $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. În acest caz soluția ecuației matriceale va fi $X = A^{-1}M$, de unde prin calcul se obține $X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

e. $A = \begin{pmatrix} 1-3a & 1 \\ -1 & -1-3a \end{pmatrix}$, de unde $Tr(A) = 1 - 3a - 1 - 3a = -6a$ şi $\det A = 9a^2$. Calculăm

$A^2 = \begin{pmatrix} 1-3a & 1 \\ -1 & -1-3a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-3a & 1 \\ -1 & -1-3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9a^2-6a & -6a \\ 6a & 9a^2+6a \end{pmatrix}$, calculăm

$Tr(A) \cdot A - \det A \cdot I_2 = -6a \begin{pmatrix} 1-3a & 1 \\ -1 & -1-3a \end{pmatrix} - 9a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9a^2-6a & -6a \\ 6a & 9a^2+6a \end{pmatrix}$, de unde se va obține identitatea $A^2 = Tr(A) \cdot A - \det A \cdot I_2$.

f. $A^3 = a^2(3M + aI_2)$. Din enunț se cunoaşte că $A = M + aI_2$, de unde $A^3 = (M + aI_2)^3$. Folosind proprietatea de comutativitate a înmulțirii matricei unitate cu o altă matrice şi proprietățile înmulțirii matricelor cu scalari, se va obține: $A^3 = M^3 + 3a \cdot M^2 + 3a^2 \cdot M + a^3 \cdot I_2$. Calculăm $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, de unde $M^3 = M^2 \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi înlocuind în relația anterioară, se va obține: $A^3 = 3a^2 \cdot M + a^3 \cdot I_2 = a^2(3 \cdot M + a \cdot I_2)$. **Asadar,** $A^3 - a^2(3M + aI_2) = O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$