

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție:

a) $\det({}^tA) = \det(A)$

$$\det({}^tA) = \det(A) = a^2 - 5$$

b) $A - aI_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ suma elementelor este 6

c) $(A - aI_2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 5I_2$

d) $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

$$\det(A) = a^2 - 5 \neq 0, \forall a \in \mathbb{Z}$$

e) $A^* = \begin{pmatrix} a & -1 \\ -5 & a \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2 - 5} \begin{pmatrix} a & -1 \\ -5 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{Z}$$

f)

$$A^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \frac{1}{a^2 - 5} \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = \pm 2$$