Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum şi Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) Se demonstrează că $\forall x, y, z \in \mathbf{R} \left(x * y\right) * z = x * \left(y * z\right) = (x+1)(y+1)(z+1)$

b) Din $x * e = x \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{(x+1)(e+1)}{2} - 1 = x$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x(e+1) + e - 1 = 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow e = 1 \in \mathbb{R}$.

c) Pentru a arăta că $\left(\mathbb{R}, *\right)$ nu este grup, este suficient să demonstrăm că există un număr real nesimetrizabil în raport cu legea $*$.

Fie $x \in \mathbb{R}$. x este simetrizabil $\Leftrightarrow \exists x' \in \mathbb{R}$ a..î. $x * x' = x' * x = e$. Din punctul b) şi din faptul ca legea $*$ este comutativă avem că $\exists e = 1 \in \mathbb{R}, x * 1 = 1 * x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$, deci $e = 1$ este element neutru al legii $*$. Din $x * x' = 1$ obținem $x' = \frac{4}{x+1} - 1 \in \mathbb{R}$ doar pentru $x \neq -1$. Deci -1 este nesimetrizabil şi în consecință $\left(\mathbb{R}, *\right)$ nu este grup.

d) Deoarece $\left(-1\right) * y = \left(-1\right) \forall y \in \mathbb{R}$, şi legea $*$ este asociativă pe $\mathbb{R}$, obținem: $\underbrace{\left(-1\right) * 0 * 1 * \left(-1\right) * 0 * 1 * \ldots * \left(-1\right) * 0 * 1}_{2007\, termeni} = \left(-1\right) * \underbrace{\left[0 * 1 * \left(-1\right) * 0 * 1 \ldots * \left(-1\right) * 0 * 1\right]}_{y} = \left(-1\right) * y = \left(-1\right)$.

e) Întocmind tabla legii de compoziție "$\circ$" pe mulțimea H obținem în interiorul acesteia doar elementele lui H. Deci $\forall x, y \in H \Rightarrow x \circ y \in H$.

f) Din tablă obținem elementul neutru $e = 1$ şi faptul că 0 şi 1 sunt simetrizabile în raport cu legea "$\circ$" simetricele lor fiind 0 respectiv 1.