Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

a) Se obține că $f(x)=\dfrac{a^2x^2+5x-7}{3x^2+3}$ şi este funcție rațională cu numărătorul şi numitorul de acelaşi grad

Limita dată este egală cu $\dfrac{a^2}{3}$. Rezultă ecuația $\dfrac{a^2}{3}=\dfrac{2a-1}{3}$ cu soluția $a=1$.

b) Asimptota orizontală spre $\pm\infty$ a funcției este $y=\dfrac{a^2}{3}$. Se obține ecuația $\dfrac{a^2}{3}=3$ cu soluțiile $a\in\{-3,3\}$.

c) Pentru $a=0$ se obține $f(x)=\dfrac{5x-7}{3x^2+3}$. Ecuația $f(x)=0$ are soluția $x=\dfrac{7}{5}$. Având în vedere semnul funcției de gradul 1 se obține că funcția este pozitivă pe intervalul $(\dfrac{7}{5},+\infty)$ şi negativă pe intervalul $(-\infty,\dfrac{7}{5})$.

d) Rezultă că $g(x)=x(x^2+1)f(x)=\dfrac{a^2x^3+5x^2-7x}{3}$ şi $g'(x)=\dfrac{3a^2x^2+10x-7}{3}$. Se obține ecuația $3a^2x^2+10x-7=0$ cu $\Delta=100+84a^2>0$ pentru oricare $a\in\mathbb{R}$, deci ecuația are două soluții reale.

e) Funcția este derivabilă pe $\mathbb{R}$. Se obține folosind derivata câtului că $f'(x)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{5x-7}{x^2+1}\right)'=\dfrac{-5x^2+14x+5}{3(x^2+1)^2}$.

f) Soluțiile ecuației $f'(x)=0$ sunt date de ecuația $-5x^2+14x+5=0$, care are două soluții reale diferite x_1,x_2. Funcția f' este continuă pe $\mathbb{R}$ şi schimbă semnul în x_1 şi x_2. Rezultă că x_1 şi x_2 sunt puncte de extrem pentru funcția f.