

Rezolvare

1. a)  $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = 1$  deci  $y = x + 1$  este asimptotă oblică la  $+\infty$ .

c)  $f(e^x + 1) = e^x + \frac{1}{e^x} + 2 \geq 4$ .

2. a)  $\int f_0(x) dx = \int \frac{e^x}{2} dx = \frac{e^x}{2} + C$ .

b)  $A(\Gamma_{f_1}) = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \ln(e^x + 1) \Big|_0^1 = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$ .

c) Din  $e^{(n+1)x} \geq e^x$  pentru orice  $x \in [0, 1]$ , se obține  $\frac{e^x}{e^{(n+1)x} + 1} \leq \frac{e^x}{e^{nx} + 1}$  pentru orice  $x \in [0, 1]$ , de

unde  $\int_0^1 f_{n+1}(x) dx \leq \int_0^1 f_n(x) dx$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .