Soluție

1. a) Fie $A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow A+A^t=\begin{pmatrix} 2a_1 & b_1+a_2 \\ b_1+a_2 & 2b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\mathrm{Tr}\left(A+A^t\right)=2\left(a_1+b_2\right)=2\,\mathrm{Tr}\left(A\right)$

b) $A\cdot A^t=\begin{pmatrix} a_1^2+b_1^2 & a_1a_2+b_1b_2 \\ a_1a_2+b_1b_2 & a_2^2+b_2^2 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Tr}\left(A\cdot A^t\right)=a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2=0$ dacă şi numai dacă $a_1=a_2=b_1=b_2=0 \Rightarrow A=0_2$.

c) Suma elementelor matricei $A\cdot A^t$ este $a_1^2+b_1^2+a_2^2+b_2^2+2a_1a_2+2b_1b_2=\left(a_1+a_2\right)^2+\left(b_1+b_2\right)^2$.

$S=0 \Rightarrow a_1+a_2=b_1+b_2=0,$ de unde obținem că $\det A=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1+a_2 & a_2 \\ b_1+b_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$

2. a) $A^2=\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}=7I_2$, deci $A^2\in K$ (pentru $a=7,\ b=0$)

b) Fie $X=aI_2+bA, Y=cI_2+dA$; atunci $XY=\left(ac+7bd\right)I_2+\left(ad+bc\right)A \Rightarrow XY\in K$

c) Fie $X=aI_2+bA, Y=cI_2+dA$, $X\neq O_2$, astfel încât $XY=I_2$. Vom demonstra că $\det X=a^2-7b^2\neq 0$.

Presupunând contrariul, ar rezulta că există $a,b\in\mathbb{Q}$ astfel încât $a^2=7b^2$. Dacă $b\neq 0,$ atunci $\left(\frac{a}{b}\right)^2=7,$ absurd, deoarece 7 nu este pătratul niciunui număr rațional. Ca urmare, $b=0,$ deci şi $a=0,$ adică $X=O_2$, contradicție.

Din $XY=I_2$ rezultă $\begin{cases} ac+7bd=1 \\ ad+bc=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=\dfrac{a}{a^2-7b^2}\in\mathbb{Q} \\ d=-\dfrac{b}{a^2-7b^2}\in\mathbb{Q} \end{cases}$, deci $Y=\dfrac{1}{a^2-7b^2}\cdot\begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix}\in K$.