**Soluție:**

**1. a)** Se arată că suma elementelor matricei $A$ este $S = 80$.
**b)** Calcul direct.
**c)** Se arată inductiv că $A^n = 32^{n-1} \cdot A$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că $rang\left(A^n\right) = 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

**2. a)** Calcul direct.

**b)** $e \in \mathbb{R}$ este element neutru al legii „$*$” $\Leftrightarrow$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $(ae-2) \cdot x = e-6$ $\Leftrightarrow$ $e = 6$ și $a = \frac{1}{3}$.

**c)** Avem $6 * 6 \in [0, 6]$ $\Leftrightarrow$ $a \in \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$. Verificăm că pentru $a \in \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$, „$*$” e o lege de compoziție pe $[0, 6]$. Pentru $y \in [0, 6]$ fixat, considerăm funcția $f : [0, 6] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (a \cdot y - 1) \cdot x - y + 6$.

Avem $\frac{1}{a} \in [3, 6]$. Dacă $0 \le y < \frac{1}{a}$, funcția $f$ este strict descrescătoare pe $[0, 6]$, deci $0 \le (6a-1) \cdot y \le f(x) \le 6 - y \le 6$. Dacă $y = \frac{1}{a}$, $0 \le f(x) = 6 - y \le 6$.

Dacă $\frac{1}{a} < y \le 6$, funcția $f$ este strict crescătoare pe $[0, 6]$, deci $0 \le 6 - y \le f(x) \le (6a-1) \cdot y \le 6$.

Așadar, pentru orice $a \in \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$, „$*$” este o lege de compoziție pe intervalul $[0, 6]$.