1.a) $f(x)=\ln\frac{x+2}{x}=\ln(x+2)-\ln x$. Rezultă $f'(x)=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x}, x\in(-\infty,-2)\cup(0,\infty)$.

Apoi $f''(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{4x+4}{x^2(x+2)^2}, x\in(-\infty,-2)\cup(0,\infty)$.

Dacă $x\in(-\infty,-2)$ atunci $0>x+2>x$, deci $(x+2)^2<x^2$ și rezultă $f''(x)<0$, deci f este concavă pe $(-\infty,-2)$.

b) $a_n=\ln\left(\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{n+2}{n}\right)-\ln\frac{n(n+1)}{2}$. Deci $a_n=\ln\frac{(n+1)(n+2)}{2}-\ln\frac{n(n+1)}{2}=\ln\frac{n+2}{n}$.

Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{n+2}{n+1}=0$.

c) Considerăm funcția $h:[1,2]\to\mathbb{R}, h(x)=(x-1)f(x)$. Aplicăm teorema lui Lagrange funcției h.

Deci există $c\in(0,1)$ astfel încât $h'(c)=\frac{h(2)-h(1)}{1}$, de unde $f(c)+(c-1)f'(c)=f(2)$.

2.a) $\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1\frac{x}{1+x^4}dx$. Apoi $\int_0^1\frac{x}{1+x^4}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(x^2)'}{1+(x^2)^2}dx$.

Deci $\int_0^1 xf(x)dx==\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(x^2)'}{1+(x^2)^2}dx=\frac{1}{2}arctg(x^2)\Big|_0^1=\frac{\pi}{8}$.

b) Se observă că $\frac{1}{1+x^2}\le\frac{1}{1+x^4}\le 1, \forall x\in[0,1]$. Aplicând proprietatea de monotonie a integralei rezultă

$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx\le\int_0^1\frac{1}{1+x^4}dx\le\int_0^1 1dx$, de unde $\frac{\pi}{4}\le\int_0^1 f(x)dx\le 1$.

c) $\int_0^x\frac{f(t)f''(t)-(f'(t))^2}{(f(t))^2}dt=\int_0^x\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right)'dt=\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{f'(0)}{f(0)}$

Deoarece $f'(x)=-\frac{4x^3}{(1+x^4)^2}$ rezultă $f'(0)=0$. Deci $\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln f(x)\Big|_0^1=\ln 2$.