Soluție

1. a) Calcul direct.
b) Tripletul $(0,1,0)$ e soluție a sistemului, $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$, deci acesta este compatibil.

Dacă $a+b+c \neq 0$ și $a^2+b^2+c^2 \neq ab+bc+ca$, atunci soluția precedentă este unică.
c) Din ipoteză rezultă că $a=b=c$. Dacă $a=b=c=0$ orice triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ este soluție.
Dacă $a=b=c\neq 0$, atunci sistemul este echivalent cu ecuația $x+y+z=1$.

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2=z-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1-x-y \\ \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \end{cases}.$$

A doua ecuație din sistem are o infinitate de soluții, care sunt coordonatele punctelor de pe cercul de centru $Q\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ și rază $r=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Soluțiile sistemului sunt $\begin{cases} x_t=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos t \\ y_t=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin t \\ z_t=1-x_t-y_t \end{cases}$, cu $t\in[0, 2\pi)$.

2. a) Deoarece a, b, c pot lua arbitrar câte 4 valori, există $4\cdot 4\cdot 4=64$ matrice în mulțimea G.
b) De exemplu, matricea $A=\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}$ are proprietățile cerute.

c) Fie $X=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\in G$. $X^2=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=\hat{1} \\ b(a+c)=\hat{0} \\ c^2=\hat{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\in\{\hat{1}, \hat{3}\} \\ c\in\{\hat{0}, \hat{2}\} \end{cases}$, deci $a+c\in\{\hat{1}, \hat{3}\}$.

Rezultă $b=\hat{0}$. Obținem patru matrice.