Soluție

1. a) $f(1)=\frac{\ln 1}{1}=0$; $f(e)=\frac{\ln e}{e}=\frac{1}{e}$. Deci $f(1)+f(e)=0+\frac{1}{e}=\frac{1}{e}$.

b) $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$. $f'(x)=0 \Rightarrow 1-\ln x=0 \Rightarrow x=e\in(0,+\infty)$. Din tabel $\Rightarrow \begin{cases} f \searrow & \textit{pentru } x\in[e,+\infty) \\ f \nearrow & \textit{pentru } x\in(0,e] \end{cases}$.

c) Avem $g'(x)=\frac{1}{x^2}$, oricare ar fi $x>0$. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)=\frac{1}{0_+}=+\infty$.

Prin urmare dreapta de ecuație $x=0$ este asimptotă verticală la dreapta la G_g.

2. a) Avem $\int f(x)\,dx=\int\left(x^{1004}+2008^x\right)dx=\int x^{1004}\,dx+\int 2008^x\,dx==\frac{x^{1005}}{1005}+\frac{2008^x}{\ln 2008}+\mathcal{C}$.

b) Dacă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f, atunci $F'(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}$.

F este crescătoare pe $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ derivata ei, adică funcția f, este pozitivă pe $\mathbb{R}$.

Cum $f(x)=x^{1004}+2008^x\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ (suma a două funcții pozitive), rezultă concluzia: F crescătoare.

c) Înlocuind pe x cu x^2, integrala de calculat devine succesiv:

$$\int_0^1 x\cdot f\left(x^2\right)dx=\int_0^1 x\left(\left(x^2\right)^{1004}+2008^{x^2}\right)dx=\int_0^1 x^{2009}\,dx+\int_0^1 x\cdot 2008^{x^2}\,dx \overset{\substack{u(x)=x^2\\ u'(x)=2x}}{=} \left.\frac{x^{2010}}{2010}\right|_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1 u'(x)\cdot 2008^{u(x)}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2010}+\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{2008^{x^2}}{\ln 2008}\right|_0^1=\frac{1}{2010}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2007}{\ln 2008}.$$