Rezolvare

1. **a)** $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$

b) $\Delta = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$ Se calculează partea dreaptă a expresiei din enunț și se obține identitatea cerută.

c) Folosim pct. b) pentru $a = 2^x, b = c = 1.$ Obținem $\left(2^x + 2\right)\left(2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 1\right) = 0$. Sau

$\left(2^x + 2\right)\left(2^x - 1\right)^2 = 0 \Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow x = 0.$

2. **a)** Pentru $x = \hat{1}$ și $y = \hat{0}$, $x, y \in \mathbb{Z}_5$ avem $I_2 \in G$.

Analog pentru $x = y = \hat{0},\ x, y \in \mathbb{Z}_5$ avem $O_2 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{2} \cdot \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix} \in G.$

b) Fie $A = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} \\ \hat{2}\hat{y} & \hat{x} \end{pmatrix},\ \hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{Z}_5$ și $B = \begin{pmatrix} \hat{z} & \hat{t} \\ \hat{2}\hat{t} & \hat{z} \end{pmatrix},\ \hat{z}, \hat{t} \in \mathbb{Z}_5$. Calculăm produsul AB și obținem:

$A \cdot B = \begin{pmatrix} \hat{u} & \hat{v} \\ \hat{2}\hat{v} & \hat{u} \end{pmatrix} \in G$. Unde $\hat{u} = \hat{x}\hat{z} + \hat{2}\hat{t}\hat{y} \in \mathbb{Z}_5$ și $\hat{v} = \hat{x}\hat{t} + \hat{y}\hat{z} \in \mathbb{Z}_5$.

c) La punctul b) am arătat că mulțimea G este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$ în raport cu adunarea matricelor. Operația de adunare a matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$ este asociativă și comutativă , elementul neutru este matricea $O_2 \in G$. Elementele simetrizabile sunt matricele de forma $-A$.

$-A = \begin{pmatrix} -\hat{x} & -\hat{y} \\ \hat{2} \cdot (-\hat{y}) & -\hat{x} \end{pmatrix}$. Notăm $\hat{u} = -\hat{x} = \widehat{5-x} \in \mathbb{Z}_5$ și $\hat{v} = -\hat{y} = \widehat{5-y} \in \mathbb{Z}_5$. $-A = \begin{pmatrix} \hat{u} & \hat{v} \\ \hat{2}\hat{v} & \hat{u} \end{pmatrix} \in G.$

Din cele de mai sus mulțimea G împreună cu operația de adunare a matricelor este grup comutativ