

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) Calcul elementer.

b) Din $x, y \in G$, rezultă $(x^2 - 2)(y^2 - 2) > 0$ și imediat $x * y = \sqrt{(x^2 - 2)(y^2 - 2) + 2} > \sqrt{2}$

c) Asociativitatea rezultă din $(x * y) * z = \sqrt{(x^2 - 2)(y^2 - 2)^2(z^2 - 2) + 2} = x * (y * z)$.

d) Din definiția elementului neutru ($\exists e \in G$ astfel încât $x * e = e * x = x$, $\forall x \in G$) se obține

$\sqrt{(x^2 - 2)(e^2 - 2) + 2} = x$, adică $(x^2 - 2)(e^2 - 2) = x^2 - 2$ și imediat $e = \sqrt{3}$.

e) Din definiția elementului simetrizabil, pentru $x = \sqrt{8} \in G$, există $x' \in G$ astfel încât

$x * x' = x' * x = e = \sqrt{3}$. Atunci $\sqrt{(x^2 - 2)(x'^2 - 2) + 2} = \sqrt{3}$ și cum $x' \in G$, $x' = \sqrt{2 + \frac{1}{x^2 - 2}} = \sqrt{\frac{13}{6}} \in G$

f) Cum $a = (2 * 2)^2 - 2 = 4$, $b = (2 * 2 * 2)^2 - 2 = 8$ și $c = (2 * 2 * 2 * 2)^2 - 2 = 16$, atunci $b^2 = ac$ adică a, b, c sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice