

Rezolvare:

a. Pentru $a=0$ matricea devine $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

atunci $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ și vom obține

$$A^2 + 2A - 4I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 6 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = B;$$

b. Pentru $a=0$ matricea devine $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, și vom obține $\det A = -5$;

c. $\det A = a - 6a - 3 - 2 = -5a - 5$;

d. $M = \{a \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq a \leq 0\} \Leftrightarrow a \in \{-2; -1; 0\}$. A este inversabilă $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

Pentru $a = -2$ se obține $\det a = 5 \neq 0$, deci A este inversabilă;

Pentru $a = -1$ se obține $\det a = 0$, deci A nu este inversabilă;

Pentru $a = 0$ se obține $\det a = -5 \neq 0$, deci A este inversabilă;

În concluzie matricea A este inversabilă pentru $a \in \{-2; 0\}$.

e. Pentru $a=0$ matricea devine $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și avem $\det A = -5$. Calculăm matricea adjunctă

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & -3 & 6 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \text{ atunci } A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & -3 & 6 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

f. Ecuația matriceală $A^2 + X = B$ are soluția $X = B - A^2$, de unde prin calcul se va obține

$$X = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 6 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$