Rezolvare

a) Se alege $x = a + b\sqrt{3}$ $a, b \in \mathbb{Z}$, $y = m + n\sqrt{3}$ $m, n \in \mathbb{Z}$.

$x \cdot y = (am + 3mn) + (an + bm)\sqrt{3}$ unde $am + 3mn, an + bm \in \mathbb{Z}$. Deci $x \cdot y \in M$

b) Se alege $x = a + b\sqrt{3}$ $a, b \in \mathbb{Z}$, $y = m + n\sqrt{3}$ $m, n \in \mathbb{Z}$.

$x + y = (a + m) + (b + n)\sqrt{3}$ unde $a + m, b + n \in \mathbb{Z}$. Deci $x + y \in M$.

c) $0 = 0 + 0\sqrt{3} \in M$,$1 = 1 + 0\sqrt{3} \in M$. Deci $\{0,1\} \subset M$

d) Operația „+" este comutativă pe $\mathbb{R}$ și admite element neutru pe 0. Deoarece M este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu „+" se obține că „+" ete comutativă și asociativă pe M și cum $0 \in M$, 0 este element neutru al operației „+" pe mulțimea M . Orice element $a + b\sqrt{3}$ are ca opus pe $-a - b\sqrt{3}$. (1)
Operația „$\cdot$" este comutativă și asociativă pe $\mathbb{R}$ și admite element neutru pe 1. Deoarece M este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu „$\cdot$" se obține că „$\cdot$" este comutativă și asociativă pe M și cum $1 \in M$, 1 este elemntul neutru al operației „$\cdot$" pe mulțimea M .(2)
Înmulțirea numerelor rele este distributivă față de adunare, deci și pe M înmulțirea numerelor este distributivă față de adunare. (3)
Din (1), (2),(3) se obține că $(M, +, \cdot)$ este inel comutativ.

e) Dacă $x = 2 - \sqrt{3}$ atunci simetricul elementului x în raport cu operația „$\cdot$" este
$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 + \sqrt{3} \in M$$

f) Deoarece din punctul precedent $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 1$ alegem $x = 2 - \sqrt{3}$ și $y = -2 - \sqrt{3}$ $x, y \in M \setminus \mathbb{Q}$ astfel încât $x \cdot y = -1 \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$