Soluție

a) $f(0)=0; g(\sqrt{2008})=\sqrt{2008}^2=2008 \Rightarrow f(-2)\cdot f(-1)\cdot f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)+g(\sqrt{2008})=2008 \Rightarrow$

$$\int_{-1}^{1}\left[f(-2)\cdot f(-1)\cdot f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)+g(\sqrt{2008})\right]\cdot|x|dx=2008\cdot\left(-\int_{-1}^{0}xdx+\int_{0}^{1}xdx\right)=2008$$

b) $f'(2x)=\left(e^{2x}-1\right)'=2e^{2x}; 2\cdot f(x)=2\cdot\left(e^{x}-1\right)=2e^{x}-2$

$x=0 \Rightarrow f'(2\cdot 0)=2e^{2\cdot 0}=2$ și $2\cdot f(0)=2e^{0}-2=2-2=0; 2\neq 0 \Rightarrow f'(2x)\neq 2\cdot f(x), \forall x\in\mathbb{R}$

c) Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ și $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ primitivele funcțiilor f respectiv $g \Rightarrow$

$F(x)=\int f(x)dx=\int\left(e^{x}-1\right)dx=e^{x}-x+\ell_1$ și $G(x)=\int g(x)dx=\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+\ell_2$;

$O(0,0)\in G_{F(x)}, G_{G(x)} \Rightarrow F(0)=G(0)=0 \Rightarrow\Rightarrow \ell_1=-1, \ell_2=0 \Rightarrow F(x)=e^{x}-x-1, G(x)=\frac{x^3}{3}$

d) $\int_0^1[f(x)-g(x)]dx=\int_0^1\left(e^{x}-1-x^2\right)dx=\left.\left(e^{x}-x-\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^1=\frac{3e-7}{3}$

e) Integrând prin părți și din formule obținem:

$$\int_0^1 f(x)\cdot g(x)dx=\int_0^1\left(e^{x}-1\right)\cdot x^2dx=\int_0^1\left(e^{x}\right)'\cdot x^2dx-\int_0^1 x^2dx=\frac{3e-7}{3}$$

f) folosim teorema de monotonie pentru funcțiile continue f și h, unde

$f,h:\left[1;e^2\right]\to\mathbb{R}, f(x)=e^{x}-1, h(x)=g\left(\sqrt{x}\right)$:

„dacă $f(x)\geq h(x), \forall x\in[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b h(x)dx, \forall a,b\in\mathbb{R}, a\leq b$”.

Avem $f'>h', x\in\left[1,e^2\right], f(1)=e>1=h(1) \Rightarrow f>h \Rightarrow \int_1^{e^2} f(x)dx\geq\int_1^{e^2} g(\sqrt{x})dx=\int_1^{e^2} h(x)dx$