Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

1.a. $f'(x) = -\dfrac{2}{x^3} + \dfrac{2}{(x+1)^3} = -\dfrac{2\left(3x^2+3x+1\right)}{x^3\left(x+1\right)^3}$.

b. $f'(x) = -\dfrac{2\left(3x^2+3x+1\right)}{x^3\left(x+1\right)^3} < 0,\ \forall x > 0$. Deci f descrescătoare pe $\left(0,+\infty\right)$.

c. $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 f'(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x^3\left(-\dfrac{2}{x^3} + \dfrac{2}{(x+1)^3}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(-2 + \dfrac{2x^3}{\left(x+1\right)^3}\right) = 0$

2.a. $\int\limits_1^e \left(f(x) - \dfrac{\ln x}{x}\right)dx = \int\limits_e^e x dx = \dfrac{x^2}{2}\Big|_1^e = \dfrac{e^2-1}{2}$

b. $\int\limits_1^e f(x)dx = \int\limits_1^e \left(\dfrac{\ln x}{x} + x\right)dx = \left(\dfrac{\ln^2 x}{2} + \dfrac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^e = \dfrac{e^2}{2}$.

c. $I_n = \left(\dfrac{1}{2}\ln^2 x\right)\Bigg|_{e^n}^{e^{n+1}} = \dfrac{2n+1}{2}$, obținem $I_{n+1} - I_n = 1 \Rightarrow$ progresie aritmetică cu rația 1.