

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) Cum $x \circ y = (x-3)(y-3) + 3$, avem

$$(x \circ y) \circ z = ((x-3)(y-3) + 3 - 3)(z-3) + 3 = (x-3)(y-3)(z-3) + 3 \text{ și}$$

$$x \circ (y \circ z) = (x-3)((y-3)(z-3) + 3 - 3) + 3 = (x-3)(y-3)(z-3) + 3 \text{ deci legea "}\circ\text{" este asociativă.}$$

b) Din definiția elementului neutru ($\exists e \in G$ astfel încât $x * e = e * x = x$, $\forall x \in G$) se obține

$$(e-3)x + a - 3e = x, \forall x \in \mathbb{R} \text{ și atunci } e = 4 \text{ și } a = 12.$$

c) Cum $x \circ y = (x-3)(y-3) + a - 9$ se obține $2 \circ (3 * 1) = (2-3)(3 * 1 - 3) + a - 9 = a - 7$. De asemenea

$$(2 \circ 3) * (2 \circ 1) = (a-9) * (a-7) = 2a-19 \text{ și atunci } a-7 = 2a-19, \text{ adică } a = 12.$$

d) Se verifică condițiile din definiția grupului (legea este peste tot definită, este asociativă și comutativă, admite elementul neutru $e = 3$ și orice element $x \in \mathbb{R}$ admite simetricul $x' = 6 - x \in \mathbb{R}$).

e) Cum pentru $a = 12$, $x \circ y = (x-3)(y-3) + 3$, atunci $x \circ x = (x-3)^2 + 3$ și $x \circ x \circ x = (x-3)^3 + 3$, atunci $m = 3$.

f) Cum
$$\begin{cases} x * y = 2 \\ x \circ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3) + (y-3) = -1 \\ (x-3)(y-3) = -2 \end{cases}, \text{ de unde rezolvând se obțin soluțiile } \begin{cases} x-3 = 1 \\ y-3 = -2 \end{cases} \text{ sau}$$

$$\begin{cases} x-3 = -2 \\ y-3 = 1 \end{cases} \text{ și deci mulțimea soluțiilor sistemului este } \{(1;4), (4;1)\}$$