

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{xy}{2xy - x - y + 1} &= \frac{2xy}{4xy - 2x - 2y + 2} = \frac{2xy}{4xy - 2x - 2y + 1 + 1} = \frac{2xy}{2x(2y-1) - 1(2y-1) + 1} = \\ &= \frac{2xy}{(2x-1)(2y-1) + 1}, \forall x, y \in A \end{aligned}$$

b) $\forall x, y \in A$ avem $x * y \in A$

$$\left. \begin{array}{l} x \in A \Rightarrow 0 \leq x < 1 \\ y \in A \Rightarrow 0 \leq y < 1 \end{array} \right\} \Rightarrow xy \geq 0 \quad (1) \quad \text{și} \quad xy - x - y + 1 > 0 \quad (2)$$

$$\text{Din (1) și (2)} \Rightarrow 2xy - x - y + 1 > 0 \Rightarrow \frac{xy}{2xy - x - y + 1} \geq 0 \Rightarrow x * y \geq 0$$

$$\text{Dar } xy - x - y + 1 > 0|_{+xy > 0} \Rightarrow 2xy - x - y + 1 > xy \geq 0 \Rightarrow \frac{xy}{2xy - x - y + 1} < 1, \text{ deci } x * y < 1$$

$$\text{c)} \quad x * x = \frac{x^2}{2x^2 - 2x + 1} = \frac{x^2}{x^2 + (x-1)^2} > 0, \forall x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \quad (1)$$

$$x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{2} \Rightarrow 2x - 1 < 0 \Rightarrow 1 - 2x > 0|_{+2x^2} \Rightarrow 2x^2 - 2x + 1 > 2x^2 > 0, \forall x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2}{2x^2 - 2x + 1} < 1 \Rightarrow \frac{x^2}{2x^2 - 2x + 1} < \frac{1}{2}, \forall x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow x * x < \frac{1}{2}, \forall x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \quad (2)$$

$$\text{Din (1) și (2)} \Rightarrow x * x \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \forall x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{d)} \quad \text{Caut } e \in (0,1) \text{ astfel ca } x * e = e * x = x, \forall x \in (0,1). \quad x * e = \frac{2xe}{(2x-1)(2e-1)+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2xe}{(2x-1)(2e-1)+1} = x, \forall x \in (0,1) \Rightarrow e = \frac{1}{2}$$

$$\text{e)} \quad \text{Fie } x \in A. \text{ Caut } x' \in A \text{ astfel încât } x * x' = x' * x = \frac{1}{2}. \text{ Dar } x * x' = \frac{2xx'}{(2x-1)(2x'-1)+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4xx' = 4xx' - 2x - 2x' + 2 \Rightarrow x' = 1 - x$$

$$\text{Dar } x' \in [0,1) \Rightarrow 1 - x \in [0,1) \Rightarrow x \in (0,1] \text{ și } x \in [0,1) \Rightarrow x \in (0,1).$$

f) Din punctele anterioare am obținut că $\frac{1}{2} \in A \setminus \{0\}$ este element neutru și toate elementele din

$A \setminus \{0\}$ sunt simetrizabile în raport cu „ $*$ ”.

Rămâne de verificat asociativitatea și comutativitatea legii de compoziție „ $*$ ” pe $A \setminus \{0\}$.