Soluție

1. a) $f'(x)=\left(\dfrac{2x-1}{x-1}\right)'=\dfrac{(2x-1)'(x-1)-(x-1)'(2x-1)}{(x-1)^2}\Rightarrow f'(x)=-\dfrac{1}{(x-1)^2},\ \forall x>1.$

b) Din definiția derivatei unei funcții într-un punct (sau utilizând L'Hôspital) avem că

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\overset{\frac{0}{0}}{=}f'(2)\overset{\text{cf. pct. a)}}{=}-\frac{1}{(2-1)^2}=-1.$$

c) Din punctul a) avem $f'(x)=-\dfrac{1}{(x-1)^2},\ \forall x>1$. Este clar că $f'(x)=-\dfrac{1}{(x-1)^2}<0\Rightarrow f\searrow$ pe $(1,+\infty)$.

2. a) Avem $\displaystyle\int_1^4 f(x)dx=\int_1^4\frac{1+\sqrt{x}}{x}dx=\int_1^4\frac{1}{x}\,dx+\int_1^4\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\ln|x|\Big|_1^4+2\sqrt{x}\Big|_1^4=\ln 4+2\left(\sqrt{4}-\sqrt{1}\right)=2+\ln 4.$

b) $\displaystyle\int_1^4 g(x)\,dx=\frac{1}{4}\int_1^4 x'\cdot\ln x\,dx=\frac{1}{4}\left(x\cdot\ln x\Big|_1^4-\int_1^4 x\cdot\frac{1}{x}\,dx\right)=\frac{1}{4}\left(4\cdot\ln 4-x\Big|_1^4\right)=\ln 4-\frac{3}{4}.$

c) Dacă presupunem prin absurd că $g(x)\geq f(x),\ \forall x\in(1,4)$, prin integrarea acestei inegalități pe intervalul $[1,4]$ (funcțiile f și g sunt definite inclusiv în capetele intervalului), obținem:

$$\int_1^4 g(x)dx\geq\int_1^4 f(x)dx\overset{cf.a)\ si\ b)}{\Longrightarrow}\ln 4-\frac{3}{4}\geq\ln 4+2$$, afirmație evident falsă.

Prin urmare presupunerea făcută este falsă, deci $\exists x_0\in(1,4)$ astfel încât $g(x)<f(x)$.