rezolvare

**1a**) $f'(x)=\dfrac{(2x+a)\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}(x^2+ax+5)}{x^2+1}=\dfrac{x^3-3x+a}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

**b**) Trebuie ca ecuația $x^3-3x=-a$ să aibă trei soluții. Pentru funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=x^3-3x$ avem

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $\infty$ |

Astfel, ecuația $g(x)=-a$ are trei soluții pentru $a\in(-2,2)$. Se verifică imediat, folosind semnul lui $f'$, că, în acest caz, funcția $f$ are trei puncte de extrem.

**c**) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+1}(x+\sqrt{x^2+1})}+0=0$,

deci avem asimptota oblică spre $\infty$ dată de ecuația $y=x$.

**2a**) $\int_{-1}^{1}x\sqrt{1-x^2}\,dx=-\dfrac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{1}=0$ (sau observăm că este integrala u nei funcții impare).

**b**) $V=\pi\int_{-1}^{1}f^2(x)dx=\pi\left(x-\dfrac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{1}=\dfrac{4\pi}{3}$.

**c**) $0\le\int_0^1 x^n f(x)\,dx\le\int_0^1 x^n dx=\dfrac{1}{n+1}$, deci limita cerută, conform teoremei cleștelui, este 0.