Soluție.

1. a) Avem că $a=b=3^{\frac{1}{5}}$, de unde rezultă că cel mai mare element al mulțimii A este $3^{\frac{1}{4}}$.

b) $\left|2x-\sqrt{7}\right|<3 \Leftrightarrow -3<2x-\sqrt{7}<3 \Leftrightarrow \sqrt{7}-3<2x<\sqrt{7}+3 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{7}-3}{2}<x<\frac{\sqrt{7}+3}{2}$. Deci, $B=\{0,1,2\}$.

2. Presupunem prin absurd că $\sqrt{5}, \sqrt{7}$ şi $\sqrt{13}$ pot fi termeni ai aceleiaşi progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ cu rația r (evident $r\neq 0$, altfel şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ ar fi constant), deci există numerele naturale m,n,p, $m\neq n\neq p\neq m$ astfel încât $\sqrt{5}=a_1+rn$, $\sqrt{7}=a_1+rm$, $\sqrt{13}=a_1+rp$. Rezultă că $\sqrt{13}-\sqrt{7}=r(p-m)$ şi $\sqrt{13}-\sqrt{5}=r(p-n)$, deci $\frac{\sqrt{13}-\sqrt{5}}{\sqrt{13}-\sqrt{7}}=\frac{p-n}{p-m}\in\mathbb{Q}$, deci $\frac{\sqrt{13}-\sqrt{5}}{\sqrt{13}-\sqrt{7}}=\frac{13+\sqrt{91}-\sqrt{65}-\sqrt{35}}{6}\in\mathbb{Q}$, de unde obținem $\sqrt{91}-\sqrt{65}-\sqrt{35}\in\mathbb{Q}$, adică $\sqrt{91}-\sqrt{65}-\sqrt{35}=q,\ q\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow\sqrt{91}-q=\sqrt{65}+\sqrt{35},\ q\in\mathbb{Q}$.
Ridicând la pătrat obținem $\sqrt{91}=\frac{q^2-9}{2q+10}\in\mathbb{Q}$, ceea ce reprezintă o contradicție.

3. Avem condițiile $0\leq n^2-n+1\leq 3n+2$, de unde obținem $n\in\{0,1,2,3,4\}$. Verificând obținem $n=2$.

4. a) $G_f\cap Ox=\left\{\left(-\sqrt{5},0\right),(0,0),\left(\sqrt{5},0\right)\right\}$ şi $G_f\cap Oy=\{(0,0)\}$. Răspuns: 3 puncte.

b) Pentru orice $\sqrt{\frac{5}{2}}\leq x<y$ avem $x^2+y^2>5$ şi $f(y)-f(x)=\left(y^2-x^2\right)\cdot\left(x^2+y^2-5\right)>0$, deci funcția este strict crescătoare pe $\left[\sqrt{\frac{5}{2}},+\infty\right)$.