Soluție

1.a) Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} arctgx = \frac{\pi}{2}$ rezultă $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)g(x)\right) = 0$.

b) Ecuația tangentei la graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ în punctul de abscisă 1 este $y - h(1) = h'(1)(x-1)$.

Deoarece $h'(x) = -\frac{2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$ rezultă $h'(1) = -\frac{1}{2}$ .Cum $h(1) = \frac{2-\pi}{4}$ rezultă că ecuația tangentei

este $y - \frac{2-\pi}{4} = -\frac{1}{2}(x-1)$.

c) Cum $h'(x) < 0, \forall x \in (0,\infty)$, rezultă că funcția *h* este strict descrescătoare pe $(0,\infty)$.

Din $x > 0$ rezultă $h(x) < h(0) = 0$, de unde concluzia $f(x) > g(x), \forall x \in (0,\infty)$.

2. a) $f_1(x) = \int\limits_0^x f_0(t)\,dt = \int\limits_0^x 1dt = x$, iar $f_2(x) == \int\limits_0^x f_1(t)\,dt = \int\limits_0^x tdt = \frac{x^2}{2}$.

Deci $f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_2(x) = \frac{x^2}{2}$. Prin urmare rezultă $f_1^2(x) = 2 f_2(x), \forall x \in \mathbb{R}$

b) Se demonstrează prin inducție că $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$. Prin urmare :

$\frac{xf_n(x)+1}{f_{n+1}(x)+2} = \frac{(n+1)x^{n+1} + (n+1)!}{x^{n+1} + 2(n+1)!}$. Rezultă $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{xf_n(x)+1}{f_{n+1}(x)+2} = n+1$.

c) Volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției $g:[0,\pi]\to[0,\pi]$ este

$vol\left(C_g\right) = \pi\int_0^\pi g^2(x)dx = \pi\int_0^\pi x^2\sin^2 xdx$. Apoi

$\pi\int_0^\pi x^2\sin^2 xdx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^\pi x^2(1-\cos 2x)dx = \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{2}\int\limits_0^\pi x^2\cos 2xdx$, iar

$\int\limits_0^\pi x^2\cos 2xdx = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi x^2(\sin 2x)'dx = -\int\limits_0^\pi x\sin 2xdx$.

Cum $-\int\limits_0^\pi x\sin 2xdx = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi x(\cos 2x)'dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \cos 2xdx = \frac{\pi}{2}$, rezultă $vol\left(C_g\right) = \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi^2}{4}$