Soluție:

1.a) Avem $f_1(x) = f_0'(x) = \dfrac{1}{x}$.

b) $f_2(x) = f_1'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 0 \Rightarrow y = 0$ asimptotă orizontală.

c) $\ln\left(1 + f_1(x)\right) \le f_1(x) \Leftrightarrow \ln\dfrac{x+1}{x} \le \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow \ln\dfrac{x+1}{x} - \dfrac{1}{x} \le 0.$ Atașăm funcția $h(x) = \ln\dfrac{x+1}{x} - \dfrac{1}{x}$,

$x \in (0,\infty)$; $h'(x) = \dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{1}{x+1} > 0 \Rightarrow h$ crescătoare; $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = 0 \Rightarrow h(x) \le 0$ c.c.t.d.

2.a) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{e-1}} f(x)\,dx = \ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^{\sqrt{e-1}} = 1$.

b) F primitivă $\Rightarrow F'(x) = f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$; $F'(x) > 0$ pentru orice $x \in (0,\infty) \Rightarrow F$ crescătoare pe $(0,\infty)$.

c) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx = \ln 5$; $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx + \int_3^4 f(x)\,dx = \int_2^4 f(x)\,dx = \ln\frac{17}{5} \Rightarrow$ c.c.t.d.

La **1.c)** $\ln\left(1+f_1(x)\right) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ este funcție compusă.

Propun: Să se arate că $f_0(x) \le \dfrac{1}{f_1(x)} - 1$,oricare ar fi $x \in (0,+\infty)$.**Soluție:**

$\ln x \le x - 1 \Leftrightarrow \ln x - x \le -1.$ Atașăm funcția

$h(x) = \ln x - x$, $x \in (0,\infty)$; $h'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$, $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$ Din tabelul de variație

$\Rightarrow h(x) \le -1$ oricare ar fi $x \in (0,\infty) \Leftrightarrow \ln x - x \le -1$ c.c.t.d.