Soluții

1.a) Motiveaza ca f este derivabila pe $\mathbb{R}-\{0\}$ $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)=0$,deci are loc cerinta.

b) $f'(x)=2x\cdot\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{x}\cdot\cos\left(\frac{1}{x^2}\right), x\in\mathbb{R}-\{0\}$ Limita ceruta este egala cu 0.

c)Cum $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$va exista un numar $\alpha>0$,astfel incat $f(x)\in(0,2),\forall x>\alpha$ .Functia f fiind continua pe $[0,\alpha]$,va fi marginita pe acest interval,deci f este marginita pe $[0,\infty)$.Deoarece f este o functie para ,va rezulta concluzia.

2.a) $\int_0^1 (1-x)^2 dx=\left.\frac{-(1-x)^3}{3}\right|_0^1=\frac{1}{3}.$

b)Cu substitutia $1-x=t$,se obtine $\int_0^1 x(1-x)^n dx=\int_0^1 (t^n-t^{n+1})dt=\left.\left(\frac{t^{n+1}}{n+1}-\frac{t^{n+2}}{n+2}\right)\right|_0^1$,de unde rezulta cerinta.

c) $\int_0^1 \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx=-n.\left.\frac{\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1=\frac{-n}{n+1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}+\frac{n}{n+1}$,de unde rezulta ca limita ceruta este egala cu $1-\frac{1}{e}$.