

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare.

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A + 3I_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$

b)
$$\begin{cases} x = 2 \\ a = 2 - b \Rightarrow x = 2, a = -1, b = 3. \\ x = a + 3 \end{cases}$$

c) $\det(A) = x^2 - 1 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x \in \{\pm 1\}.$

d) $\begin{pmatrix} x & a \\ b & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3a & x+2a \\ 2b+3x & b+2x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & a \\ b & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+b & 2a+x \\ 3x+2b & 3a+2x \end{pmatrix} \Rightarrow 3a = b. \text{ Din}$
 $a, b \in \{0, 1, 2, 3\} \Rightarrow (a, b) \in \{(0, 0), (1, 3)\}.$

e) $A^2 = \begin{pmatrix} x & a \\ b & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & a \\ b & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + ab & 2ax \\ 2bx & x^2 + ab \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$A^2 - 2xA + (x^2 - ab)I_2 = \begin{pmatrix} x^2 + ab & 2ax \\ 2bx & x^2 + ab \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x^2 & 2ax \\ 2bx & 2x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x^2 - ab & 0 \\ 0 & x^2 - ab \end{pmatrix} = O_2.$$

f) $X \in M \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x & a \\ b & x \end{pmatrix}, x, a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow X^2 = \begin{pmatrix} x & a \\ b & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & a \\ b & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + ab & 2ax \\ 2bx & x^2 + ab \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} x^2 + ab & 2ax \\ 2bx & x^2 + ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + ab = 1 \\ 2ax = 2 \Rightarrow 2bx = 0 \Rightarrow b = 0 \text{ sau } x = 0. \text{ Din ecuația} \\ 2bx = 0 \end{cases}$$

$$2ax = 2 \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow a = \pm 1 \Rightarrow X \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$