Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) $f'(x)=\left((x^2+2x+3)e^x\right)'=(x^2+2x+3)'e^x+(x^2+2x+3)\left(e^x\right)'=(x^2+4x+5)e^x, \forall x\in\mathbb{R}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}f'(0)\overset{\text{cf. pct. a)}}{=}5e^5$ (s-a folosit L'Hôspital sau definiția derivatei).

c) f' este crescătoare pe $\mathbb{R}\Leftrightarrow\left(f'(x)\right)'=f''(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ .Cum $f''(x)=\left((x^2+4x+5)e^x\right)'=$

$=(x^2+4x+5)'e^x+(x^2+4x+5)\left(e^x\right)'=(x^2+6x+9)e^x=\left(x+3\right)^2e^x\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ rezultă concluzia.

2. a) Relația de demonstrat este echivalentă cu a arăta că $f'(x)=g(x),\ \forall x>0$. Într-adevăr avem
$f'(x)=\left(x^2+x\ln x\right)'=\left(x^2\right)'+\left(x\ln x\right)'=2x+x'\cdot\ln x+x\cdot\left(\ln x\right)'=2x+\ln x+1=g(x),\quad \forall x\in(0,+\infty)$

b) Avem $\int\limits_1^e f(x)\cdot g(x)\,dx=\int\limits_1^e f(x)\cdot f'(x)\,dx=\left.\dfrac{f^2(x)}{2}\right|_1^e=\dfrac{f^2(e)}{2}-\dfrac{f^2(1)}{2}=\dfrac{\left(e^2+e\right)^2-1}{2}$.

c) $A\left[\Gamma_f\right]=\int\limits_1^e\left|f(x)\right|dx=\int\limits_1^e\left|\underbrace{x^2+x\ln x}_{>0}\right|dx=\int\limits_1^e x^2dx+\int\limits_1^e x\ln x\,dx=\left.\dfrac{x^3}{3}\right|_1^e+\int\limits_1^e\left(\dfrac{x^2}{2}\right)'\ln x\,dx=$

$=\left.\left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}\ln x-\dfrac{x^2}{4}\right)\right|_1^e=\dfrac{4e^3+3e^2-1}{12}$

.