rezolvare

1a) $f'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}<0,\forall x>0$.

b) Avem $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right)=\infty(0-1)=-\infty, \lim\limits_{x\to 0} f(x)=\ln 1=0$. În plus, f este continuă, deci are proprietatea lui Darboux. Astfel, mulțimea valorilor funcției este $(-\infty,0)$.

c) Funcția este continuă, deci nu are asimptote verticale în punctele domeniului de definiție. În 0, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\ln 1=0$, deci nici aici nu există asimptotă verticală. În sfârşit, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=-1$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)+x)=\lim\limits_{x\to\infty}\ln(1+x)=\infty$, deci nu există asimptotă oblică spre ∞.

2a) $\int_0^1 f(x)\,dx=x\operatorname{arctg}x\,\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\,\Big|_0^1=\frac{\pi-2\ln 2}{4}$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_1^x f(\ln t)dt=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(\ln x)}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arctg}(\ln x)=\frac{\pi}{2}$, folosind regula lui l'Hospital pentru cazul $\frac{\infty}{\infty}$ şi faptul că pentru funcției $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\int_1^x f(\ln t)dt$ are derivata $g'(x)=f(\ln x)$.

c) $s_n=\frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+...+f\left(\frac{n}{n}\right)\right)$ este sumă Riemann ataşată funcției f, intervalului $[0,1]$, diviziunii $D_n=\left(0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},...,\frac{n}{n}\right)$ şi punctelor intermediare $X_n=\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n},...,\frac{n}{n}\right)$.

Astfel, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=\int_0^1 f(x)dx=\frac{\pi-2\ln 2}{4}$.