Rezolvare

1. Determinarea lui $a;b$

$f(0)=2008 \Leftrightarrow b=2008$

$f(2008)=0 \Leftrightarrow 2008a+2008=0 \Leftrightarrow a=-1$

Deci funcția este $f:[-2008;2008]\to\mathbb{R},\ f(x)=-x+2008$

Coeficientul lui x fiind -1 funcția de gradul intîi este strict descrescătoare. $\Rightarrow \operatorname{Im}(f)=[f(2008);f(-2008)]=[0;4016]$

2.a) $A(1;1)\in G_f \Leftrightarrow f(1)=1 \Leftrightarrow m-2m+m+1=1$,adevărat pentru oricare $m\in\mathbb{R}_+^*$.

b) Din relațiile lui Viete avem:

$\begin{cases}-m=3\\ m+n=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=-3\\ n=2+3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=-3\in\mathbb{Z}\\ n=5\in\mathbb{R}\end{cases}$

3. Prin calcul direct avem:

$$f\left(\frac{1}{2}-r\right)=f\left(\frac{1}{2}+r\right),\forall r\in\mathbb{R} \Leftrightarrow -2\left(\frac{1}{2}-r\right)^2+2\left(\frac{1}{2}-r\right)+1=-2\left(\frac{1}{2}+r\right)^2+2\left(\frac{1}{2}+r\right)+1$$

$$\Leftrightarrow -2\left(\frac{1}{4}-r+r^2\right)+1-2r=-2\left(\frac{1}{4}+r+r^2\right)+1+2r$$ ceea ce este adevărat $\forall r\in\mathbb{R}$.

Altfel: Se știe că $x=-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}$ este axa de simetrie al graficului lui f .Egalitatea cerută reflectă tocmai faptul că punctele $\left(\frac{1}{2}-r,\ f\left(\frac{1}{2}-r\right)\right),\left(\frac{1}{2}+r,\ f\left(\frac{1}{2}+r\right)\right)$ sunt simetrice față de dreapta $x=\frac{1}{2}$.

4.a) Radicalul este definit dacă $9-x^2\ge 0$.

$x-3=\sqrt{9-x^2} \Leftrightarrow x^2-6x+9=9-x^2 \Leftrightarrow 2x^2-6x=0 \Leftrightarrow 2x(x-3)=0 \Leftrightarrow x=0$ sau $x=3$.

Pentru $x=3$ ecuația este satisfacută,iar pentru $x=0$ obținem $-3=3$ (fals),deci $\mathbb{S}=\{3\}$

b) Logaritmul este definit dacă $0<2^x+x-1$.(*)

Folosind proprietățile logaritmului avem:

$$x(1-\lg 5)=\lg(2^x+x-1) \Leftrightarrow x\left(\lg\frac{10}{5}\right)=\lg(2^x+x-1) \Leftrightarrow x\lg 2=\lg(2^x+x-1) \Leftrightarrow \lg 2^x=\lg(2^x+x-1)$$

$$\Leftrightarrow 2^x=2^x+x-1 \Leftrightarrow x=1.$$

$x=1$ verifică ecuația : $1-\lg 5=\lg 2 \Leftrightarrow \lg\frac{10}{5}=\lg 2$,deci $\mathbb{S}=\{1\}$

Deasemenea $x=1$ se acceptă ca soluție pentrucă verifică $(*)$.