Rezolvare

1. $f(1)=9 \Leftrightarrow m^2-2m+1=9 \Leftrightarrow m^2-2m-8=0 \Leftrightarrow m_1=-2; m_2=4$.
Ambele valori convin deoarece $-2;4 \in \mathbb{R}-\{0;2\}$.

2.a. $f(x) \geq g(x), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2+x+1 \geq x+1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ adevărat.

2.b. Sistemul este simetric ,asociem ecuația de gradul II : $t^2-at+5=0$.
Ecuația de gradul doi va avea toate soluțiile reale dacă
$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow a^2-20 \geq 0 \Leftrightarrow a \in \left(-\infty, 2\sqrt{5}\right] \cup \left[2\sqrt{5}, \infty\right)$.

3. $f(x)<0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -2m^2+mx-8<0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<0 \\ \Delta<0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2-64<0 \Leftrightarrow m \in (-8;8)$.

Dar $m \in \mathbb{Z}_-^*$ prin urmare $m \in \{-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1\}$.

4.a. $x-\sqrt[3]{x^2-x-1}=1 \Leftrightarrow x-1=\sqrt[3]{x^2-x-1} \Leftrightarrow (x-1)^3=x^2-x-1$
$\Leftrightarrow x^3-3x^2+3x-1=x^2-x-1 \Leftrightarrow x(x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=0$ sau $x=2, x \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{S}=\{0;2\}$.

4.b. Condițiile de existență sunt $\begin{cases} 5-2^x>0 \\ 3+2^x>0. \end{cases}$

Folosind proprietățile logaritmilor obținem
$\left(3+2^x\right)\left(5-2^x\right)=16 \Leftrightarrow \left(2^x\right)^2-2\cdot 2^x+1=0 \Leftrightarrow \left(2^x-1\right)^2=0 \Leftrightarrow 2^x=1 \Leftrightarrow x=0$,care satisface ecuația,deci $\mathbb{S}=\{0\}$.