SOLUȚIE:

a) $f'(x)=\dfrac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Rightarrow$ punctele critice sunt $x=-1$ și $x=1$.

b) $f(n)=\dfrac{n}{n^2+1} \Rightarrow A \in G_f$; $f(-x)=-f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ este funcție impară. Graficul funcției f este simetric față de punctul $O(0,0)$ deci simetricul lui A față de O este un punct al graficului..

c)

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$- - - - - - -$	$- - - - - - -$	0	$+ + + + +$	$+$	$+ + + + +$	0	$- - - - - - -$	$- - - - - - -$

$f'(x) \le 0, \forall x \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$ și $f'(x) \ge 0, \forall x \in [-1,1]$.

d)

x	$-\infty$		-1		0		1	
$f'(x)$	$- - - - - - -$	$- - - - - - -$	0	$+ + + + +$	$+$	$+ + + + +$	0	$- - - - - - - - - - - - - -$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow \quad \searrow$	$-\dfrac{1}{2}$	$\nearrow \quad \nearrow$		$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow \quad \searrow \quad \searrow$

$f'(x)>0, \forall x \in [-1,1] \Rightarrow$ funcția f este strict crescătoare pe intervalul $[-1,1]$; $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right] \subset [-1,1]$

Atunci, $\forall x, y \in \left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right], x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$.

e) Din analiza tabloului de variație rezultă $x=-1$ și $x=1$ sunt punctele de extrem local ale funcției f iar $f(-1)=-\dfrac{1}{2}$ și $f(1)=\dfrac{1}{2}$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0 \Rightarrow$ dreapta $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ și spre $-\infty$. Din monotonia funcției f pe intervalele $(-\infty,-1],[-1,1],[1,\infty)$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{2} \le f(x) \le \dfrac{1}{2}, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=-\dfrac{1}{2}$ și $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=\dfrac{1}{2}$

f) Din subpunctul **e)** $-\dfrac{1}{2} \le f(x) \le \dfrac{1}{2}, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow M=\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right] \cap \mathbb{Z}=\{0\}$