Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

a) $F(x)=\int f(x)dx \Leftrightarrow F'(x)=f(x)<0, x\in(-1,3)\Rightarrow F\downarrow, x\in(-1,3)$ (F este strict descrescrescătoare pe $(-1,3)$)

b) $F(x)=\int f(x)dx=\int\left(x^2-2x-3\right)dx=\frac{x^3}{3}-2\cdot\frac{x^2}{2}+5x+\ell$; $O(0,0)\in G_{F(x)}\Rightarrow F(0)=0\Rightarrow \ell=0\Rightarrow$

$F(x)=\frac{x^3}{3}-2\cdot\frac{x^2}{2}+5x$

c) $\int_{-1}^{3}|x|\cdot f(x)dx=-\int_{-1}^{0}x\cdot\left(x^2-2x-3\right)dx+\int_{0}^{3}x\cdot\left(x^2-2x-3\right)dx=-\int_{-1}^{0}\left(x^3-2x^2-3x\right)dx+\int_{0}^{3}\left(x^3-2x^2-3x\right)dx$

$\Rightarrow\int_{-1}^{3}|x|\cdot f(x)dx=\frac{289}{6}$

d) $\int_{0}^{m}f(x)dx=\int_{0}^{m}\left(x^2-2x-3\right)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right)\right|_0^m=\frac{m^3}{3}-m^2-3m$; pentru $m=3\Rightarrow\int_{0}^{m}f(x)dx\in\mathbb{Z}$.

e) folosim teorema de medie pentru funcția f : „$m\cdot(b-a)\le\int_{a}^{b}f(x)dx\le M\cdot(b-a),\forall a,b\in\mathbb{R},a\le b$ **,** unde m și M sunt valorile de minim respectiv maxim ale funcției g în intervalul $[a,b]$**”**

$f'(x)<0\Rightarrow f\downarrow, x\in(-\infty,1),\ f'(x)>0\Rightarrow f\uparrow, x\in(1,\infty)\Rightarrow f(x)\ge f(1)=-4,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$

(prin înlocuire în teorema de medie) $\int_{u}^{v}f(x)dx\ge-4(v-u)=4(u-v)$

f) $\int_{0}^{1}\frac{e^x f(x)}{x+1}dx=\int_{0}^{1}\frac{e^x(x+1)(x-3)}{x+1}dx=\int_{0}^{1}e^x(x-3)dx\Rightarrow$ integrând prin părți $\int_{0}^{1}\frac{e^x f(x)}{x+1}dx=4-3e$