**Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului**
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**Soluții**

**a)** Pentru $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-1,-2\}$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \in \mathbb{R}$, deci funcția are limită în $x = x_0$. Funcția nu are limite în punctele $x_0 = -1$ și $x_0 = -2$, deoarece $f(-1-0) = -\infty$, $f(-1+0) = +\infty$, $f(-2-0) = +\infty$, $f(-2+0) = -\infty$.

**b)** Se obține $g(x) = \dfrac{x^2}{(x+1)(x+2)}$. Funcția are asimptotele verticale $x_0 = -1$ și $x_0 = -2$, și asimptota orizontală $y = 1$.

**c)** Calcul direct.

**d)** Se obține Se arată că $f(x+1) = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x+3}$, $f(x+2) = \dfrac{1}{x+3} - \dfrac{1}{x+4}$, ...,
$f(x+2008) = \dfrac{1}{x+2009} - \dfrac{1}{x+2010}$,
Rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x+1) + f(x+2) + f(x+3) + ... + f(x+2008)\right) =$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + ... + \frac{1}{x+2009} - \frac{1}{x+2010}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+2010}\right) = 0$$

**e)** Folosind punctul c) se obține că $f'(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2} - \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{-2x-3}{(x+2)^2(x+1)^2}$.. Ecuația dată este $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)} = -\dfrac{3}{8} \cdot \dfrac{-2x-3}{(x+2)^2(x+1)^2}$. După simplificări și reduceri se obține ecuația $8x^2 + 18x + 7 = 0$ cu soluțiile $x \in \{-\frac{1}{2}, -\frac{7}{4}\}$.

**f)** Deoarece $f'(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2} - \dfrac{1}{(x+1)^2}$ se obține $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f'(x) + f'(x+1) + f'(x+2) + ... + f'(x+2008)\right) =$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+4)^2} - \frac{1}{(x+3)^2} + ... + \frac{1}{(x+2010)^2} - \frac{1}{(x+2009)^2}\right) =$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{(x+2010)^2} - \frac{1}{(x+1)^2}\right] = 0.$$