

**Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

Rezolvare

a) Demonstrăm că  $(\forall) x, y \in H$  avem  $x * y \in H$ .

$$\left. \begin{array}{l} x \in H \Rightarrow x \in \mathbb{Z}, x \geq -1 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}, x+1 \geq 0 \\ y \in H \Rightarrow y \in \mathbb{Z}, y \geq -1 \Rightarrow y \in \mathbb{Z}, y+1 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (x+1)(y+1) \in \mathbb{Z} \text{ și } (x+1)(y+1) \geq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow xy + x + y \in \mathbb{Z} \text{ și } xy + x + y \geq -1 \Rightarrow x * y \in H.$$

b) Demonstrăm că  $(\forall) x, y \in G$  avem  $x \circ y \in G$ .

$$\left. \begin{array}{l} x \in G \Rightarrow x \in \mathbb{Z}, x \leq 1 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}, x-1 \leq 0 \\ y \in G \Rightarrow y \in \mathbb{Z}, y \leq 1 \Rightarrow y \in \mathbb{Z}, y-1 \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (x-1)(y-1) \in \mathbb{Z} \text{ și } (x-1)(y-1) \geq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 - (x-1)(y-1) \in \mathbb{Z} \text{ și } 1 - (x-1)(y-1) \leq 1 \Rightarrow x + y - xy \in \mathbb{Z} \text{ și } x + y - xy \leq 1 \Rightarrow x \circ y \in \mathbb{Z} \text{ și } \\ x \circ y \leq 1 \Rightarrow x \circ y \in G$$

c)

$$\left. \begin{array}{l} (x \circ y) \circ z = 1 + (x-1)(y-1)(z-1) \\ x \circ (y \circ z) = 1 + (x-1)(y-1)(z-1) \end{array} \right\} \Rightarrow (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), (\forall) x, y, z \in \mathbb{Z}$$

d) Căutăm  $e \in \mathbb{Z}$  astfel încât  $x * e = e * x = x, (\forall) x \in \mathbb{Z}$ .

$$\text{Dar } x * e = x + e + xe \Rightarrow e(1+x) = 0, (\forall) x \in \mathbb{Z} \Rightarrow e = 0.$$

e)  $a * \frac{1}{a} = a + \frac{1}{a} + 1 \geq 2 + 1 = 3$  deoarece  $a + \frac{1}{a} \geq 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

f)  $x * x = 2x + x^2 \Rightarrow$  ecuația devine  $2x + x^2 = -1 \Rightarrow x = -1$