

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție:

a) $a = b = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 1$

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 5 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

c) Dacă $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ este soluție a sistemului, atunci ea verifică ecuațiile

sistemului. Din prima ecuație obținem $a^2 = -1$, ecuație care nu are soluție în \mathbb{R}

d) $\det(A) = a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1$

$a^2b^2 \geq 0, a^2 \geq 0, b^2 \geq 0 \Rightarrow \det(A) \geq 1$

e) $\det(A), \det(A^{-1}) \in \mathbb{Z}, \det(A) \geq 1 \Rightarrow \det(A) = 1 \Rightarrow a = b = 0$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

f) Din regula lui Cramer $\Rightarrow x = \frac{d_x}{\det(A)}, y = \frac{d_y}{\det(A)}, z = \frac{d_z}{\det(A)} \Rightarrow d_x = 0, d_y = 0, d_z = \det(A)$

Soluția sistemului este $(0, 0, 1)$.