Soluție:

1. a) Dacă $A, B \in G$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, cu $a, a' \in (0, \infty)$ şi $b, b' \in \mathbb{R}$, atunci $AB = \begin{pmatrix} a \cdot a' & a \cdot b' + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $a \cdot a' \in (0, \infty)$, $a \cdot b' + b \in \mathbb{R}$.

b) De exemplu, pentru $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se arată că $CD \neq DC$.

c) Se arată că $I_2 - A + A^2 = \begin{pmatrix} \alpha & ab \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, cu $\alpha = 1 - a + a^2 > 0$.

Obținem $I_2 - A + A^2 - ... + A^{2008} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$, deoarece $x = \dfrac{1 + a^{2009}}{1 + a} > 0$ şi $y \in \mathbb{R}$.

2. a) Utilizând eventual relațiile lui Viète, se obține că $a = 0$, $b = -3$ şi $c = 2$.

b) Dacă f are rădăcina $\sqrt{2}$, atunci $2a + c + (b + 2) \cdot \sqrt{2} = 0$, de unde rezultă $b = -2$ şi $c = -2a$.

Apoi, $f = X^3 + aX^2 - 2X - 2a = (X + a)(X^2 - 2)$, cu rădăcina rațională $x_1 = -a$.

c) Presupunem că f are rădăcina $k \in \mathbb{Z}$. Rezultă că există $q \in \mathbb{Q}[X]$, astfel încât $f = (X - k) \cdot q$.

Mai mult, coeficienții lui q sunt numere întregi. Folosind ipoteza, obținem că numerele $(-k) \cdot q(0)$ şi $(1 - k) \cdot q(1)$ sunt impare, ceea ce este fals, deoarece $(-k)(1 - k)$ este un număr par.