Soluție

1.a) Se înlocuiesc $x_0 = 2,\ y_0 = 2,\ z_0 = 1$ în ecuațiile sistemului şi se obține $m = 3$ şi $n = 2$.
b) Sistemul admite soluție unică dacă determinantul matricei sistemului este nenul. Cum $\det A = 3 - n$, rezultă $n \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.
c) Dacă $n \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, sistemul este compatibil determinat. Dar sistemul este compatibil nedeterminat; ca urmare, $n = 3$. Rangul matricei sistemului este 2 şi deoarece sistemul este compatibil, rangul matricei extinse trebuie să fie 2. Obținem $m = 1$.
2. a) Fiecare matrice din *G* este determinată de o pereche $(a,b) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, deci *G* are 9 elemente.
b) Înmulțirea este corect definită pe *G*: $\begin{pmatrix} \hat{1} & a & b \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{1} & c & d \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & a+c & b+d \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \in G$

Înmulțirea matricelor este asociativă pe $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_3)$, deci şi pe *G*. Elementul neutru este I_3, iar inversa matricei $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & a & b \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \in G$ este $A^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{1} & -a & -b \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$.

c) Dacă $X = \begin{pmatrix} \hat{1} & a & b \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $X^2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & a+a & b+b \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ şi $X^3 = \begin{pmatrix} \hat{1} & a+a+a & b+b+b \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} = I_3$.