Soluții

1.a) Avem ca $f'(x)=1-\cos x\geq 0$ si f nu se anuleaza pe o multime care este interval,de unde se obtine concluzia.

b)Functia f este continua pe $\mathbb{R}$,deci nu are asimptote orizontale.Cum $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$,functia f nu are asimptote orizontale.

Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1, \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\sin x\right)$ si aceasta nu exista,functia nu are asimptota oblica la ∞ .Analog spre $-\infty$.

c) Functia este derivabila pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Cum $g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{x-\sin x}{x^3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{6}}\in\mathbb{R}$,deducem ca g este derivabila si in x=0.

2.a) f continua implica faptul ca f are primitive.

b) Avem ca $I=\int_0^1\left(e^{-x}-e^{-2x}\right)dx=\left.\left(-e^{-x}+\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\right|_0^1$ si finalizare.

c) $f(t)\geq 0,\forall t\in[0;x], x>0\Rightarrow\int_0^x f(t)dt\geq 0$

Din ipoteza rezulta ca $e^{-x}\geq -x+1\Rightarrow 1-e^{-x}\leq x\Rightarrow e^{-x}-e^{-2x}\leq xe^{-x}$,deci

$\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\leq e^{-x}, x>0\Rightarrow\int_0^x f(t)dt\leq\int_0^x e^{-t}dt=1-e^{-x}<1$.