

Soluție

- a) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \Rightarrow$ graficul funcției nu are asimptotă orizontală
 $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = -1 \Rightarrow y = x - 1 \text{ asimptotă oblică spre } \pm\infty$$

$$l_s(1) = \lim_{x \nearrow 1} f(x) = -\infty$$

$$l_d(1) = \lim_{x \searrow 1} f(x) = +\infty \Rightarrow x = 1 \text{ asimptotă verticală}$$

b) $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}, \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}.$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = f'(-1) = \frac{3}{4}$

d) $y - f(-1) = f'(-1)(x + 1)$

$$y + \frac{5}{2} = \frac{3}{4}(x + 1)$$

$$4y - 3x + 7 = 0$$

e) $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$

$$x \in (-\infty, 0] \Rightarrow f'(x) \geq 0 \Rightarrow f \text{ crescătoare}$$

$$x \in [0, 1) \Rightarrow f'(x) \leq 0 \Rightarrow f \text{ descrescătoare}$$

$$x \in (1, 2] \Rightarrow f'(x) \leq 0 \Rightarrow f \text{ descrescătoare}$$

$$x \in [2, +\infty) \Rightarrow f'(x) \geq 0 \Rightarrow f \text{ crescătoare}$$

f) $m = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{x^2 + x + 1} = 0$

$$m = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2}{x^2 + x + 1} = 2$$

$$m \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(m^2 - 1)x^4 + (m + 1)x^2 - 2}{x^2 + x + 1} = +\infty$$

$$m \in (-1, 1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(m^2 - 1)x^4 + (m + 1)x^2 - 2}{x^2 + x + 1} = -\infty$$