

## Soluții

$$1.a) \left. \begin{array}{l} \overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM} \\ \overline{AN} = \overline{AD} + \overline{DN} \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{AM} + \overline{AN} = \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{BM} + \overline{DN} = \overline{AB} + \overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{BC} + \frac{2}{3}\overline{DC}$$

$$1.b) \text{ Fie } P \text{ mijlocul lui } [MN]. \quad \overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AP} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overline{AM} + \overline{AN}) = \frac{1}{3}(\overline{AB} + \overline{AD} + \frac{2}{3}\overline{DC} + \frac{1}{2}\overline{BC})$$

Fie  $BD \perp AC$ ,  $D \in [AC]$ .

$$\text{În } \triangle ABC, \sin(\widehat{BCA}) = \frac{BD}{BC} \Rightarrow BD = \sin(30^\circ) \cdot 10 = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$$

$$DC^2 = BC^2 - BD^2 = 100 - 25 = 75 \Rightarrow DC = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}.$$

$$2.a) \text{ Cum } m(\sphericalangle BCA) = 180^\circ - m(\sphericalangle BAC) - m(\sphericalangle ABC) = 180^\circ - 120^\circ - 30^\circ = 30^\circ \Rightarrow$$

$\triangle ABC$  este isoscel. Deci înălțimea  $[BD]$  este și mediană. Rezultă că  $[AC] = [AD] + [DC]$

$$= 2DC = 10\sqrt{3}$$

$$\sigma[ABC] = \frac{BD \cdot AC}{2} = \frac{5 \cdot 10\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}$$

$$\begin{cases} 3B + 2C = 225^\circ \\ B + C = 90^\circ \end{cases} \cdot (-2) \Leftrightarrow \begin{cases} 3B + 2C = 225^\circ \\ -2B - 2C = -180^\circ \end{cases}$$

$$2.b) \quad B = 225^\circ - 180^\circ = 45^\circ \Rightarrow C = 45^\circ$$

$$\sin B = \sin C = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow BC = \frac{2 \cdot AC}{\sqrt{2}} = \frac{24}{\sqrt{2}} = 12\sqrt{2}$$

$$3.a) BC = AC \Rightarrow \sqrt{(a-1)^2 + 9} = \sqrt{a^2 + 4} \Rightarrow a^2 - 2a + 10 = a^2 + 4 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

$$a = 3 \Rightarrow \triangle ABC \text{ este isoscel. Fie } CM \perp BC \Rightarrow M \text{ este mijlocul lui } [AB] \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right).$$

$$3.b) \quad CM : \frac{y}{x-3} = \frac{\frac{5}{2}}{-\frac{5}{2}} = -1 \Rightarrow CM : x + y - 3 = 0.$$