**Soluție**

**1.a)** într-adevăr, *f* este o funcție de două ori derivabilă, $f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)$, deci $f'(0)=1$. Evident $f(0)=0$.

**b)** Suntem în cazul $1^\infty$. Dar $\left(1+f(x)\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln\left(1+f(x)\right)}$. Deci avem de calculat $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+f(x)\right)}{x}$ (cazul $\frac{0}{0}$).

Cu regula lui l´Hôpital, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+f(x)\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{1+f(x)}=f'(0)$, cea ce este evident deoarece $f(0)=0$.

**c)** $f^n(x)-x^n=\left(f(x)-x\right)\cdot\left(f^{n-1}(x)+xf^{n-2}(x)+...+x^{n-2}f(x)+x^{n-1}\right)$. Apoi:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f^{n-1}(x)}{x^{n-1}}=1, \lim\limits_{x\to 0}\frac{xf^{n-2}(x)}{x^{n-1}}=1,...., \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{n-2}f(x)}{x^{n-1}}=1, \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{n-1}}{x^{n-1}}=1$ şi

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{f''(0)}{2}$. Deci

$$\lim_{x\to 0}\frac{f^n(x)-x^n}{x^{n+1}}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}\cdot\left(\frac{f^{n-1}(x)}{x^{n-1}}+\frac{xf^{n-2}(x)}{x^{n-1}}+\frac{x^{n-2}f(x)}{x^{n-1}}+\frac{x^{n-1}}{x^{n-1}}\right)=\frac{nf''(0)}{2}$$

**2. a)** $g(x)=\int\limits_0^x f(t)dt=\int\limits_0^x\frac{1}{1+t}dt=\ln(1+x)$.

**b)** $\int_0^1 f^2(x)g(x)dx=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{(x+1)^2}dx$. Apoi:

$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{(x+1)^2}dx=-\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}\right)'\ln(1+x)dx=-\frac{1}{2}\ln 2+\int_0^1\frac{1}{(x+1)^2}dx$ şi

$\int_0^1\frac{1}{(x+1)^2}dx=-\left(\frac{1}{x+1}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}$. Rezultă $\int_0^1 f^2(x)g(x)dx=\frac{1-\ln 2}{2}$.

**c)** Notăm $s_n=\frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+...+f\left(\frac{n}{n}\right)\right)$.Rezultă

$f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+...f\left(\frac{n}{n}\right)=ns_n$

Pentru funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{1+x}$ şi pentru fiecare $n\geq 1$

formăm diviziunea echidistantă $\Delta_n=\left(x_0=0<x_1=\frac{1}{n}<x_2=\frac{2}{n}<...<x_n=\frac{n}{n}=1\right)$,

iar în fiecare interval $[x_{i-1},x_i]$ alegem punctul intermediar $c_i=x_i=\frac{i}{n}$.

Astfel se observă că suma $s_n$ este chiar suma Riemann asociată funcției *f*,

diviziuni $\Delta_n$ şi punctelor intermediare $c_i$: $\sigma_n(f,c_i)=\sum\limits_{i=1}^n f(c_i)(x_i-x_{i-1})=s_n$.

Inegalitatea din enunț rezultă din interpretarea geometrică a sumei Riemann, din faptul că funcția *f* convexă pe $[0,1]$ şi din faptul că aria suprafeței plane cuprinse între dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=1$, graficul funcției şi axa $Ox$ este $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2$.