Soluție

1.a) $X(a)X(b)=(I_2+aA)(I_2+bA)=I_2+(a+b)A+abA^2$

Cum $A^2=O_2$, rezultă $X(a)X(b)=I_2+(a+b)A=X(a+b)$.

b) $X(a)\cdot X(e)=X(a)\Rightarrow X(a+e)=X(a)\Rightarrow a+e=a\Rightarrow e=0$.

c) Prin inducție avem $X(a_1)\cdot X(a_2)\cdot\ldots\cdot X(a_n)=X(a_1+a_2+\ldots+a_n)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Rezultă $X(2)X(3)\ldots X(2008)=X(1005\cdot 2007)$.

2.a) Pentru $x=-1$ rezultă $f(-1)=f^2(-1)+3f(-1)+1$, deci $f(-1)=-1$

b) Restul împărțirii polinomului f la $X-5$ este $f(5)$

Pentru $x=0$ rezultă $f(1)=f^2(0)+3f(0)+1=1$

Pentru $x=1$ rezultă $f(5)=f^2(1)+3f(1)+1=5$

c) Fie șirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin $a_0=0$ *și* $a_{n+1}=a_n^2+3a_n+1,\ \forall n\geq 0$

Prin inducție rezultă $f(a_n)=a_n$ și $a_n<a_{n+1}$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$

Polinomul $h=f-X$ se anulează de o infinitate de ori, deci $f-X=0$, adică $f=X$