

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) Prin calcul direct rezultă $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} \right) = \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} = f(x), \forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \pm \frac{1}{2} \right\}$

b) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ asimptotă orizontală spre $\pm\infty$

\Rightarrow graficul funcției nu are asimptotă oblică

$$l_s \left(-\frac{1}{2} \right) = \lim_{x \nearrow -\frac{1}{2}} f(x) = +\infty$$

$$l_d \left(-\frac{1}{2} \right) = \lim_{x \searrow -\frac{1}{2}} f(x) = -\infty \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ asimptotă verticală}$$

$$l_s \left(\frac{1}{2} \right) = \lim_{x \nearrow \frac{1}{2}} f(x) = -\infty$$

$$l_d \left(\frac{1}{2} \right) = \lim_{x \searrow \frac{1}{2}} f(x) = +\infty \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ asimptotă verticală}$$

c) $f'(x) = \frac{-8x}{(4x^2 - 1)^2}, \forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \pm \frac{1}{2} \right\}.$

d) $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

$$y - \frac{1}{3} = -\frac{8}{9}(x - 1) \Rightarrow 9y + 8x - 11 = 0$$

e) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

$$x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2} \right) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ strict crescătoare}$$

$$x \in \left(-\frac{1}{2}, 0 \right] \Rightarrow f'(x) \geq 0 \Rightarrow f \text{ crescătoare}$$

$$x \in \left[0, \frac{1}{2} \right) \Rightarrow f'(x) \leq 0 \Rightarrow f \text{ descrescătoare}$$

$$x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty \right) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \text{ strict descrescătoare}$$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x+1) + f(x+2) + \dots + f(x+2008)) =$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2x+1} - \frac{1}{2x+3} + \frac{1}{2x+3} - \frac{1}{2x+5} + \dots + \frac{1}{2x+4015} - \frac{1}{2x+4017} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2x+1} - \frac{1}{2x+4017} \right) = 0.$$