Soluție

a) $\int_1^3 \frac{f(x)}{x+x^2}dx = \int_1^3 \frac{1+x}{x+x^2}dx = \int_1^3 \frac{1+x}{x(1+x)}dx = \int_1^3 \frac{1}{x}dx = \ln|x|\Big|_1^3 = \ln 3$

b) funcția g este una dintre primitivele funcției $f \Leftrightarrow g(x) = \int f(x)dx \Leftrightarrow g'(x) = f(x)$

$g'(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)' = 1 + \frac{2x}{2} = 1 + x = f(x) \Leftrightarrow$ funcția g este una dintre primitivele funcției f

c) $F(x) = \int f(x)dx = \int (1+x)dx = x + \frac{x^2}{2} + \ell; O(0,0) \in G_{F(x)} \Rightarrow F(0) = 0 \Rightarrow \ell = 0 \Rightarrow F(x) = x + \frac{x^2}{2}$

d) Dacă G este o primitivă a funcției $g \Rightarrow G(x) \in \int g(x)dx \Leftrightarrow G'(x) = g(x)$

$g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow G$ crescătoare $\forall x \in \mathbb{R}$; cum $2 < 3; 2,3 \in \mathbb{R} \Rightarrow G(2) < G(3)$

e) $g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} \geq 1 + x = f(x) \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} \geq 0 \Rightarrow$ conform teoremei de monotonie:

$f(x) \geq g(x), \forall x \in [u;v] \Rightarrow \int_u^v f(x)dx \geq \int_u^v g(x)dx$, avem $\int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx, \forall a,b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$

f) $V_f = \pi \cdot \int_{-1}^{1} (1+x)^2\, dx = \pi \cdot \int_{-1}^{1} \left(1 + 2x + x^2\right)dx = \pi \cdot \left(x + 2\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{8\pi}{3}$