Soluție

1. $(1+\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{2})^2=1+2\sqrt{2}+2+1-2\sqrt{2}+2=6\in\mathbb{N}$.

2. Cerința este echivalentă cu $x^2-4x+3\geq -1,$ adică $x^2-4x+4=(x-2)^2\geq 0$ oricare x real.

3. Împărțim prima ecuație prin 2 și notăm $S=x+y=8, P=xy=12$, deci x, y sunt soluții ale ecuației $t^2-St+P=0$, adică $t^2-8t+12=0$, ecuație verificată de 2 și 6, deci sistemul are soluțiile (2,6) și (6,2).

4. Condiții de existență: $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$. Împărțim ecuația prin $(n-2)!$; se obține $n(n-1)=12=3\cdot 4$, deci singura soluție număr natural este $n=4$.

5. Utilizăm scrierea pe coordonate a vectorilor de poziție, deci $\overrightarrow{OA}=\vec{i}-\vec{j};\overrightarrow{OB}=3\vec{i}+5\vec{j},\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=4\vec{i}+4\vec{j}$, deci $C(4,4)$.

6. Utilizăm teorema cosinusului pentru unghiul A: $\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\dfrac{4+16-9}{16}=\dfrac{11}{16}$.