Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) Cu regula lui Sarrus sau prin aplicarea proprietăților determinaților rezultă $\det A = 0$.
b) Cum $\det A = 0$, sistemul admite soluții nenule.
c) Scăzând prima ecuație a sistemului din a doua, rezultă $(b-a)(y_0 - z_0) = 0$, deci $y_0 = z_0$. Rangul matricei sistemului este egal cu 2; z este necunoscută secundară, $z = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$. Obținem $y = \lambda,\ x = -(a+b+c)\lambda$. Cum $(1,1,1)$ soluție implică $a+b+c = -1$, soluțiile sistemului sunt $(\lambda, \lambda, \lambda)\ \lambda \in \mathbb{R}$.

2.a) Notând $A_{x,y} = \begin{pmatrix} x & iy \\ iy & x \end{pmatrix} \Rightarrow A_{x_1,y_1} \cdot A_{x_2,y_2} = \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1) \\ \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1) & x_1x_2 - y_1y_2 \end{pmatrix}$. În plus,

$(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2 = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) \neq 0 \Rightarrow A_{x_1,y_1} \cdot A_{x_2,y_2} \in G$

b) Comutativitatea este consecință a punctului **a)**, iar asociativitatea este proprietate generală a înmulțirii din $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Elementul neutru este matricea $A_{1,0} = I_2$, iar inversa matricei $A_{x,y}$ este $A_{x',y'} = \begin{pmatrix} x' & iy' \\ iy' & x' \end{pmatrix}$,

cu $x' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ și $y' = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

c) Evident φ este funcție bijectivă.

φ morfism: $\varphi(x_1 + iy_1) \cdot \varphi(x_2 + iy_2) = \begin{pmatrix} x_1 & iy_1 \\ iy_1 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 & iy_2 \\ iy_2 & x_2 \end{pmatrix} = A_{x_1,y_1} \cdot A_{x_2,y_2} = A_{x_1x_2 - y_1y_2,\, x_1y_2 + x_2y_1}$. Concluzia rezultă din faptul că $(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$.