Soluție

1.a) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$.

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.Din tabelul de variație al funcției

$\Rightarrow$ pe intervalul $(0,1)$ f este descrescătoare , iar pe intervalul $(1,\infty)$ f este crescătoare.

c) Din punctul **b)** $\Rightarrow f(x) \geq f(1) = 1$ oricare ar fi $x \in (0,\infty)$

$\Leftrightarrow x - \ln x \geq 1$ oricare ar fi $x \in (0,\infty) \Leftrightarrow x \geq \ln x + 1$ oricare ar fi $x \in (0,\infty)$;

pentru $x \in (0,\infty) \Rightarrow \sqrt{x} \in (0,\infty) \Rightarrow \sqrt{x} \geq \ln\sqrt{x} + 1$ oricare ar fi $x \in (0,\infty)$ c.c.t.d.

2.a) $\int_0^x \left(t^2 + t + 1\right) dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{\int_0^x \left(t^2 + t + 1\right) dt}{x^3 + 1} = \frac{1}{3}$.

b) $\int \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{-1}{x} + c$; $F(1) = 0 \Leftrightarrow -1 + c = 0 \Leftrightarrow c = 1$.

c) $V = \pi \int_0^1 a^2 x^4\, dx = \pi \frac{a^2}{5} = 5\pi \Rightarrow a = 5$.