Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție:

1. a) Se arată că $\alpha^3 = e$.

b) Ecuația devine $\alpha \cdot x = e$, cu unica soluție $x = \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Fie $\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4 \cdot \sigma_5 \cdot \sigma_6$ produsul căutat, cu o ordonare oarecare a factorilor.

$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma_1)\cdot\varepsilon(\sigma_2)\cdot\varepsilon(\sigma_3)\cdot\varepsilon(\sigma_4)\cdot\varepsilon(\sigma_5)\cdot\varepsilon(\sigma_6) = (-1)^{m(\sigma_1)+m(\sigma_2)+m(\sigma_3)+m(\sigma_4)+m(\sigma_5)+m(\sigma_6)} = -1$,
deci $\sigma \neq e$.

2. a) Se verifică prin calcul direct.

b) Numărul 5 fiind prim, $\forall\, k \in \{1, 2, 3, 4\}$, numărul $\alpha_k = C_5^k$ este divizibil cu 5, deci $\widehat{\alpha_k} = \hat{0}$.

Pentru $B = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{0} \end{pmatrix}$ şi $a \in \mathbb{Z}_5$, $(A(a))^5 = (a \cdot I_2 + B)^5$ $a^5 \cdot I_2 + B^5 = a \cdot I_2 + B^4 \cdot B = a \cdot I_2 + B = A(a)$.

c) Pentru $a \in \mathbb{Z}_5$, avem $(A(a))^5 = A(a)$. Prin inducție se deduce că $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $(A(a))^{5^k} = A(a)$.

Obținem că $\forall\, a \in \mathbb{Z}_5$, $(A(a))^{2008} = (A(a))^4$. Cum $(A(a))^{2008} = A(a)$, rezultă $(A(a))^4 = A(a)$.

Din punctul a) avem $(A(a))^5 = A(a)$ şi deducem $(A(a))^2 = A(a)$. Se obține $a = \hat{3}$.