Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) $f'(x)=\left(x-\frac{1}{e^x}\right)'=1+\frac{1}{e^x}\Rightarrow f'(0)=1+\frac{1}{e^0}=2$.

$f(0)=0-\frac{1}{e^0}=-1$. Deci $f(0)+f'(0)=-1+2=1$.

b) Avem din punctul a) că $f'(x)=1+\frac{1}{e^x},\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f''(x)=\left(1+\frac{1}{e^x}\right)'=-\frac{1}{e^x},\forall x\in\mathbb{R}$.

Din faptul că $e^x>0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f''(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$, adică f este concavă pe $\mathbb{R}$.

c) Este cunoscut faptul că derivata unei funcții într-un punct reprezintă panta tangentei la grafic în acel punct. Prin urmare cerința problemei este echivalentă cu demonstrarea faptului că $f'(x)\geq 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ (deoarece dreapta care face cu axa Ox un unghi de 45° are panta 1) .Cum $e^x>0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f'(x)\geq 1,\forall x\in\mathbb{R}$.

2. a) Avem $f_1(x)=1-x,\forall x\in[0,1]$. Deci $\int_0^1 f_1(x)\,dx=\int_0^1(1-x)\,dx=\left.\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\right|_0^1=\frac{1}{2}$.

b) Volumul cerut va fi egal cu: $V\left(C_{f_1}\right)=\pi\int_0^1 f_1^2(x)dx=\pi\int_0^1\left(1-2x+x^2\right)dx=\pi\left.\left(x-x^2+\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^1=\frac{\pi}{3}$.

c) Avem $f_{2008}(x)=1-x+x^2-\ldots+x^{2008}$ (egalitatea rezultă prin înlocuirea lui n cu $1,2,\ldots,2007$ în relația din ipoteză și apoi prin sumarea celor 2007 relații astfel obținute); apoi, fie prin calcul direct, fie utilizând formula pentru $a^{2009}+b^{2009}$ se obține $(x+1)f_{2008}(x)=x^{2009}+1,\forall x\in[0,1]$.

Așadar $\int_0^1(x+1)f_{2008}(x)\,dx=\int_0^1\left(x^{2009}+1\right)dx=\left.\left(\frac{x^{2010}}{2010}+x\right)\right|_0^1=\frac{2011}{2010}$.