Soluții

1. a) $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}$. Se verifică prin calcul direct că $A^2 - \mathrm{Tr}(A)\cdot A + \det A \cdot I_2 = 0_2$.

b) $\mathrm{Tr}(A) = 0 \Rightarrow A^2 = -\det A \cdot I_2$. Atunci $A^2 \cdot B = B \cdot A^2 = -(\det A)\cdot B$

c) $A^2 - \mathrm{Tr}(A)\cdot A + \det A \cdot I_2 = 0_2 \Rightarrow A^2B - \mathrm{Tr}(A)\cdot AB + (\det A)\cdot B = 0_2$

$A^2 - \mathrm{Tr}(A)\cdot A + \det A \cdot I_2 = 0_2 \Rightarrow BA^2 - \mathrm{Tr}(A)\cdot BA + (\det A)\cdot B = 0_2$

Scăzând relațiile de mai sus rezultă $\mathrm{Tr}(A)\cdot(AB - BA) = 0_2 \Rightarrow AB = BA$

2. a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 2\sum\limits_{1\le i<j\le 4} x_i x_j = 10.$

b) $(X-1)(X-3) \mid f \Rightarrow f(1) = f(3) = 0$. Obținem $a = -14,\ b = 6$

c) Fie u, v cele două rădăcini duble ale polinomului f; din relațiile lui Viète rezultă $2(u+v) = 6$ şi $u^2 + v^2 + 4uv = 13$. Atunci $uv = 2$; $u = 1$, $v = 2$, de unde $a = -12,\ b = 4$