Soluție:

a) $f'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} = px + \frac{q}{\sqrt{x}}, \forall x > 0$ şi deci $p = 2, q = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$

b) $\int_1^2 f\left(x^2\right)dx = \int_1^2 \left(x^4 + x\right)dx$,de unde $\int_1^2 f\left(x^2\right)dx = \frac{77}{10} < 8$

c) $F'(x) = f(x) > 0, \forall x > 0$,deci F este strict crescătoare pe $(0,\infty)$ şi astfel $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$ (deoarece $8 < 9$) conduce la $F\left(\sqrt{2}\right) < F\left(\sqrt[3]{3}\right)$.

d) $\int_1^3 h_{p,0}(x)dx = \int_1^3 pxdx = 4p$; $\int_1^3 h_{p,0}(x)dx = m \Rightarrow \forall m \in \mathbb{Z}, \exists p = \frac{m}{4} \in \mathbb{Q}$ cu proprietatea din enunț

e) De exemplu , $g(x) = x^3$ nu este constantă şi $\int_{-1}^1 g(x)dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^1 = 0 \in \mathbb{Z}$

f) Egalitatea conduce la $p \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_1^4 = q \cdot 2\sqrt{x}\Big|_1^4$. Se ajunge la $15p = 4q$. E suficient să luăm , de exemplu , $p = 4, q = 15 \in \mathbb{Z}^*$