Soluție:

a) $I_1 = \int_0^1 \left(1 - x^2\right) dx$, $I_1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

b) $J_2 = \int_1^2 \frac{2}{x} dx = 2\int_1^2 \frac{1}{x} dx$, $J_2 = 2 \cdot \ln 2 = \ln 4$ şi deci $k = 4 \in \mathbb{Z}$

c) $I_n = n^2 - \frac{n^3}{3}$, $n^2 - \frac{n^3}{3} \geq 0 \Rightarrow n^2\left(3 - n\right) \geq 0 \Rightarrow n \leq 3$. Numărul căutat este $n = 3$.

d) $J_2 = \ln 4 < \ln 2008$, $J_2 + J_3 = \ln 4 + \ln 27 = \ln 4 \cdot 27 < \ln 2008$, $J_2 + J_3 + J_4 = \ln 4 \cdot 27 \cdot 256 > \ln 2008$ şi în final avem $n \in \{2,3\}$

e) $J_n = n \cdot \ln n$ şi pentru $n \geq 2$ avem $2 \leq n < n + 1$. Din $n \geq 2 \Rightarrow 0 < \ln n < \ln(n+1)$,deducem $J_n \leq J_{n+1}$

f) $I_n = n^2 - \frac{n^3}{3} = \frac{3n^2 - n^3}{3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ n este multiplu de 3. Un exemplu : $n = 6$ pentru care $I_6 \in \mathbb{Z}$.

(Observație : Poate fi dat direct exemplul , dar trebuie verificată condiția din enunț.)