

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

1.a. $f(1) + f\left(\frac{1}{e}\right) = 1$

b. $f'(x) = \frac{2}{x(1 - \ln x)^2}$

c. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \ln x}{(1 - \ln x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x}} = -1 \Rightarrow y = -1$ ecuația asimptotei.

2.a. $\int (f + g)(x) dx = e^x + \ln x + C$

b. $\int_1^2 (f^2(x) + g^2(x)) dx = \left(\frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = \frac{e^4 - e^2 + 1}{2}$

c.

$$\text{Din } f(x)g(x) \leq \frac{f^2(x) + g^2(x)}{2} \Rightarrow \int_1^2 (f^2(x) + g^2(x)) dx \geq 2 \int_1^2 f(x)g(x) dx \Rightarrow \int_1^2 f(x)g(x) dx \leq \frac{1}{2} \int_1^2 (f^2(x) + g^2(x)) dx$$

Deci $\int_1^2 e^x \frac{1}{x} dx \leq \frac{e^4 - e^2 + 1}{4}$