

Soluție

1.a. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y+12 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ și $B \cdot A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2x+2y \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

$A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow x = 6$ și $y \in \mathbb{R}$.

b. Calculând $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ și $4(A - I_2) = 4 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = 4(A - I_2)$.

c. $A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^2 = 2^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = 2^3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2^3 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Din relația $A^3 - aA^2 + 4A = O_2 \Rightarrow a = 4$.

2.a. $x * y = xy - 3(x + y) + 12 = xy - 3x - 3y + 9 + 3 = x(y - 3) - 3(y - 3) + 3 = (x - 3)(y - 3) + 3, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

b. Ecuația $x \circ (x + 1) + x * (x + 1) = 11 \Leftrightarrow 2x + 4 + x^2 - 5x + 6 + 3 = 11 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$ cu soluțiile $x_1 = 1$ și $x_2 = 2$.

c. Sistemul este echivalent cu $\begin{cases} x \circ (y - 1) = 0 \\ (x + 1) * y = x * (z + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2 = 2 = 0 \\ (x - 2)(y - 3) = (x - 3)(y - 2) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2 = 2 = 0 \\ xy - 3x - 2y + 6 = xy - 2x - 3y + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2 = 2 = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -1.$