rezolvare

1a) $f'(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}$, $f''(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(f(x) + \frac{\pi}{2} x \right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -1$, folosind regula lui l'Hospital pentru cazul $\frac{0}{0}$. Obținem $y = -\frac{\pi}{2} x - 1$, ecuația asimptotei oblice spre $-\infty$.

c) Avem $x_2 = \frac{\pi}{4} < 1 = x_1$ şi demonstrăm inductiv că şirul este strict descrescător. Cum el este şi cu termeni pozitivi, rezultă că este convergent.

2a) $\int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4) dx = \frac{1}{30}$.

b) $I_n = \frac{2x-1}{2}(x-x^2)^n \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{n}{2}(2x-1)^2 (x-x^2)^{n-1} dx = \frac{n}{2}\int_0^1 \left((x-x^2)^{n-1} - 4(x-x^2)^n \right) dx = \frac{n}{2} I_{n-1} - 2nI_n$.

c) Din **b)**, $I_n < \frac{1}{4} I_{n-1}$. De aici rezultă inductiv $I_n < \frac{1}{4^n} I_0 = \frac{1}{4^n}$. Cum $I_n > 0$, limita cerută este 0.