**Soluții**

**1.a)** Matricea sistemului $A$ conține un minor nenul de ordin 2, spre exemplu $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$

Dacă $A$ are rangul 2, atunci $\det A = 0$ (singurul minor de ordin 3). Avem $\det A = 2(m-1)$, deci $\det A = 0 \Rightarrow m = 1$

**b)** Dacă $x_0 + y_0 + z_0 = 4$, din a treia ecuație a sistemului rezultă $x_0 = 2,\ y_0 + z_0 = 2$. Folosind și a doua ecuație rezultă $y_0 = z_0 = 1$. Atunci, din prima ecuație a sistemului rezultă $m = \frac{1}{2}$

**c)** Sistemul are soluție unică dacă $\det A \neq 0 \Rightarrow m \neq 1$.

Aplicând regula lui Cramer, rezultă $x = -\frac{1}{m-1},\ y = 1,\ z = -\frac{m}{m-1}$

$(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{Z}^3 \Rightarrow m-1 | 1 \Rightarrow m \in \{0, 2\}$

**2.a)** $X+1 | f \Rightarrow f(-1) = 0$. Cum $f(-1) = 5 + p \Rightarrow p = -5.$

**b)** Dacă $\alpha \in \mathbb{R}$ este rădăcină dublă, atunci $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$

Din $f'(\alpha) = 0 \Rightarrow 4(\alpha^3 - 1) = 0 \Rightarrow \alpha = 1$. Din $f(\alpha) = 0 \Rightarrow p = 3.$

**c)** Cum $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 2\sum_{1 \le i < j \le 4} x_i x_j = 0,$ dacă polinomul ar avea toate rădăcinile reale, atunci acestea ar fi toate egale cu 0, contradicție.