Soluție

1.a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Se verifică relația.

1.b) $A^3 - A = A^2 - I_3; A^5 - A^3 = A^4 - A^2; A^7 - A^5 = A^6 - A^4;..., A^{2n+1} - A^{2n-1} = A^{2n} - A^{2n-1}$

Prin însumare obținem: $A^{2n+1} - A = A^{2n} - I_3; A^{2n+2} - A^2 = A^{2n+1} - A \Rightarrow$

$A^{2n} - A^2 = A^{2n-1} - A \Rightarrow A^{2n+1} - A^{2n-1} = A^2 - A = I_3$; $A^{2n+2} - A^{2n} = A^2 - I_3$

1.c) Demonstrație prin inducție.Verificare pentru $n=1, n=2$ .Presupunem adevărată pentru toate valorile $\leq n-1$ şi o dem.pt. $n.$ Utilizând relația $A^n = A^{n-2} + A^2 - I_2$,rezultă concluzia.

2.a) $x^4 - 1 = 0$ are soluțiile complexe: $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = i, x_4 = -i$

2.b) $P_3 = (x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)$ unde $\varepsilon_{1,2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

2.c) $x^{12} - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1)\ (x^2 + \sqrt{3}x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$