

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție:

1. a) Se arată că $AB = BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Calcul direct.

c) Dacă X este o soluție a ecuației, obținem că $X \in C(A)$, deci există $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}. \text{ Rezultă } \begin{pmatrix} x^2 + x & 0 \\ 2xy + y & x^2 + x \end{pmatrix} = A, \text{ deci } \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ (2x+1)y = 3 \end{cases}, \text{ adică } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Se obțin soluțiile $X_1 = B$, $X_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

2. a) Fie $x, y \in G$. Avem $1 + xy \in (0, 2)$, deci $1 + xy > 0$.

$$\text{Atunci, } x * y \in G \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(y+1) > 0 \\ (x-1)(y-1) > 0 \end{cases}, \text{ adevărat.}$$

b) Calcul direct.

$$c) f(x) = f\left(\frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \dots * \frac{1}{9}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \dots \cdot f\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \dots \cdot \frac{8}{10} = \frac{1}{45}.$$

Din $\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{45}$ rezultă $x = \frac{22}{23}$.