Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

a) F primitivă $\Leftrightarrow F(x)\in \int f(x)dx \Leftrightarrow F'(x)=f(x)$;

$f(x)=1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-x+1}{x^2}>0;\left(x^2>0,\Delta=b^2-4ac<0\Rightarrow x^2-x+1>0\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow F'(x)>0,\forall x\in(0,\infty)\Rightarrow F$ este strict crescătoare

b) $\int xf(x)dx=\int x\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\int\left(x-1+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{x^2}{2}-x+\ln|x|+\ell$

$x\in(0,+\infty)\Rightarrow|x|=x\Rightarrow\int xf(x)dx=\frac{x^2}{2}-x+\ln x+\ell$

c) $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2}\geq\frac{1}{x}, x\in(0,+\infty)\Leftrightarrow x^2-x+1\geq x\Leftrightarrow x^2-2x+1\geq 0\Leftrightarrow(x-1)^2\geq 0$

d) $\int_1^2 x^2 f(x)dx=\int_1^2 x^2\frac{x^2-x+1}{x^2}dx=\int_1^2\left(x^2-x+1\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_1^2=\frac{11}{6}$

e) din punctul **c)** avem $f(x)\geq\frac{1}{x}$, oricare $x\in(0,+\infty)$; conform teoremei de monotonie:

$f(x)\geq g(x),\forall x\in[u;v]\Rightarrow\int_u^v f(x)dx\geq\int_u^v g(x)dx\Rightarrow f(x)\geq g(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow\int_1^e f(x)dx\geq\int_1^e\frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_1^e=\ln e-\ln 1=1-0=1$

f) $V_f=\pi\cdot\int_a^b g^2(x)dx=\pi\cdot\int_1^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\pi\cdot\left(x-\ln|x|-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^2=\frac{(3-\ln 4)\cdot\pi}{2}$