

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare.

a) $A(1,3) + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$

b) $\begin{cases} 3p - q = 2 \\ q - 2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \Rightarrow \begin{cases} p = 3 \\ q = 7 \end{cases}.$

c) $B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2 \Rightarrow B^4 = (-I_2)^2 = I_2.$

d) $B^2 = -I_2, B^3 = -B, B^4 = I_2, \dots, B^8 = I_2 \Rightarrow B - I_2 - B + I_2 + B - I_2 - B + I_2 = O_2.$

e) $A(2,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a + c = -1 \\ -a + 2c = 2 \\ 2b + d = -1 \\ -b + 2d = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

f) $\det(A(x,y)) = \begin{vmatrix} x & y \\ -y & x \end{vmatrix} = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1, \text{ cu } x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 0, y = \pm 1 \text{ sau}$

$$y = 0, x = \pm 1 \Rightarrow A \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$