Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) Avem că $f'(x)=1-\sin x\geq 0$ şi derivata nu se anuleaza pe o multime care e interval , deci are loc concluzia.

b) Se demonstreaza prin inductie matematica ca $x_n \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

c).Arata ca sirul este crescător .

. Deduce folosind si b) ca sirul este convergent. Arata ca $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{\pi}{2}$.

2.a) $I_1 = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$

b) $I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x(\cos x - 1)dx \leq 0$,de unde se obtine concluzia.

c) $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)' \cdot \cos^{n-1} xdx$; $I_n = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^2 x\right)\cdot \cos^{n-2} xdx$; $I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$,deci

$I_n = \frac{n-1}{n}.I_{n-2}$.

Se motiveaza ca $I_n \neq 0$. Inmultind relatiile anterioare obtinem $I_3 \cdot I_4 \cdot ... \cdot I_n = \frac{2}{3} I_1 \cdot \frac{3}{4} \cdot I_2 \cdot ... \cdot \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ şi se deduce relatia ceruta.

Relatia ceruta se poate stabili si prin inductie matematica dupa ce se gaseste relatia de recurenta.