

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) $\int_1^3 \frac{f(x)}{x+x^2} dx = \int_1^3 \frac{1+x}{x+x^2} dx = \int_1^3 \frac{1+x}{x(1+x)} dx = \int_1^3 \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_1^3 = \ln 3$

b) funcția g este una dintre primitivele funcției $f \Leftrightarrow g(x) = \int f(x) dx \Leftrightarrow g'(x) = f(x)$

$$g'(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)' = 1 + \frac{2x}{2} = 1 + x = f(x) \Leftrightarrow \text{funcția } g \text{ este una dintre primitivele funcției } f$$

c) $F(x) = \int f(x) dx = \int (1+x) dx = x + \frac{x^2}{2} + \ell; O(0,0) \in G_{F(x)} \Rightarrow F(0) = 0 \Rightarrow \ell = 0 \Rightarrow F(x) = x + \frac{x^2}{2}$

d) Dacă G este o primitivă a funcției $g \Rightarrow G(x) \in \int g(x) dx \Leftrightarrow G'(x) = g(x)$

$$g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow G \text{ crescătoare } \forall x \in \mathbb{R}; \text{ cum } 2 < 3; 2, 3 \in \mathbb{R} \Rightarrow G(2) < G(3)$$

e) $g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} \geq 1 + x = f(x) \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} \geq 0 \Rightarrow$ conform teoremei de monotonie:

$$f(x) \geq g(x), \forall x \in [u; v] \Rightarrow \int_u^v f(x) dx \geq \int_u^v g(x) dx, \text{ avem } \int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx, \forall a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$$

f) $V_f = \pi \cdot \int_{-1}^1 (1+x)^2 dx = \pi \cdot \int_{-1}^1 (1+2x+x^2) dx = \pi \cdot \left(x + 2 \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{8\pi}{3}$