Soluție

1. **a)** Prin calcul direct rezultă $\det A = 3\left(1-m^2\right)$.

b) Dacă $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ rezultă $\det A \neq 0,$ deci $\operatorname{rang}(A) = 3.$

Pentru $m = 1$ sau $m = -1$, există cel puțin un minor de ordin doi nenul în A, deci $\operatorname{rang}(A) = 2.$

c) Dacă $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, sistemul este compatibil determinat.

Pentru $m = 1 \Rightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right)$, care are rangul 2, egal cu rangul lui A, deci sistemul este compatibil (nedeterminat).

Pentru $m = -1 \Rightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right)$, care are rangul 3, și cum $\operatorname{rang} A = 2,$ rezultă sistemul este incompatibil.

2. **a)** Se verifică prin calcul direct că $x * y \in G_2$, $\forall x, y \in G_2$, adică operația „$*$” este corect definită pe G_2.

Folosind definiția se verifică și asociativitatea și comutativitatea operației. Elementul neutru este $e = \frac{7}{3}$, iar simetricul oricărui element $x \in G_2$ este $x' = \frac{9x-16}{9(x-2)} = 2 + \frac{1}{9(x-2)} \in (2,\infty) = G_2$.

b) Se arată că φ este bijectivă și că $\varphi(x * y) = \varphi(x)\cdot\varphi(y)$, $\forall x, y \in G_2$.

c) Dacă $x, y \in [\alpha,\infty)$ și $\alpha \geq 2$, atunci $x * y = 3(x-2)(y-2) + 6(\alpha-2) + \alpha \geq \alpha,$ deci G_α este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu operația „$*$”.