

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) Dacă $x = \sqrt{2}$ și $y = -\sqrt{2}$, atunci $x * y = \frac{\sqrt{2} \cdot (-\sqrt{2}) - 2}{\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) - 3} = \frac{4}{3} < \frac{3}{2}$. Deci $x * y \in I$

b) Fie $x, y \in I_1$. Se demonstrează că $x * y \in I_1$.

$$x * y \in I_1 \Leftrightarrow \frac{xy - 2}{x + y - 3} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{xy - 2 - x - y + 3}{x + y - 3} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(y-1)}{x + y - 3} \leq 0 \text{ adevărat } \forall x, y \in (-\infty, 1].$$

c) Legea "*" este asociativă $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in I_1 (x * y) * z = x * (y * z)$

$$(x * y) * z = \left(\frac{xy - 2}{x + y - 3} \right) * z = \frac{\frac{xy - 2}{x + y - 3} \cdot z - 2}{\frac{xy - 2}{x + y - 3} + z - 3} = \frac{xyz - 2x - 2y - 2z + 6}{xy + xz + yz - 3x - 3y - 3z + 7}$$

$$\text{Prin calcul } x * (y * z) = \frac{xyz - 2x - 2y - 2z + 6}{xy + xz + yz - 3x - 3y - 3z + 7}$$

d) $x * 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{x \cdot 1 - 2}{x + 1 - 3} = 1 \Leftrightarrow \frac{x - 2}{x - 2} = 1$ adevărat $\forall x \in (-\infty, 1]$

Deci mulțimea soluțiilor ecuației este $S = I_1$

e) Presupunem că $\exists e \in I_1$ astfel încât $\forall x \in I_1 \quad x * e = e * x = x$. Din $x * e = x \quad \forall x \in I_1$ obținem

$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \forall x \in I_1$, absurd. Deci legea "*" nu admite element neutru pe mulțimea I_1 .

f) Datorită asociativității legii "*" și a punctelor b) și d)

$$A = (-2008) * (-2007) * \dots * (-1) * 0 * 1 = \left[\underbrace{(-2008) * (-2007) * \dots * (-1) * 0}_{x \in I_1} \right] * 1 = x * 1 = 1.$$