Soluție

1.a) $f(A) = A^2 = I_2$

1.b) $f(X + f(X)) = A \cdot (X + A \cdot X) = A \cdot X + A^2 \cdot X = A \cdot X + X = X + f(X)$

1.c) Fie $f(X_1) = f(X_2) \Rightarrow A \cdot X_1 = A \cdot X_2 \Rightarrow X_1 = X_2$, deoarece A este inversabilă , deci f este injectivă.

Fie $Y \in M_2(\mathbb{R})$. $X = A^{-1} \cdot Y$ este o preimagine a lui Y .Rezultă f este surjectivă, deci f este bijectivă

2.a)

$X, Y \in M \Rightarrow A \cdot X = X \cdot A, A \cdot Y = Y \cdot A \Rightarrow A \cdot (X \cdot Y) = (A \cdot X) \cdot Y = (X \cdot A) \cdot Y =$

$X \cdot (A \cdot Y) =$

$X \cdot (Y \cdot A) = (X \cdot Y) \cdot A$

2.b) Fie $X, Y \in G \Rightarrow \det(X) \neq 0, \det(Y) \neq 0, \det(X \cdot Y) \neq 0$ și $X \cdot Y \in M \Rightarrow X \cdot Y \in G$.

$X \in M$ și $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$.Cum $\det(X) \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$.

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{c}{a^2} & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \in G$$

2.c) Fie $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$, $X^2 = I_2 \Rightarrow c = 0, a = \pm 1.$ Deci există un element de ordin doi : $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.