

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) Se demonstrează că $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x * y = y * x$

$$\Leftrightarrow 2008(x-2008)(y-2008) + 2008 = 2008(y-2008)(x-2008) + 2008 \text{ adevărat deoarece}$$

înmulțirea este comutativă pe \mathbb{R}

b) $x * y = x \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2008(x-2008)(y-2008) + 2008 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow (x-2008)[2008(y-2008)-1] = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow y = \frac{1}{2008} + 2008 \in \mathbb{R}$$

c) $x * z = z \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2008(x-2008)(z-2008) + 2008 = z \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow (z-2008)[2008(x-2008)-1] = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow z = 2008 \in \mathbb{R}$$

d) Se demonstrează că $\forall x, y \in \mathbb{R} - \{2008\} \quad x * y \in \mathbb{R} - \{2008\} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2008(x-2008)(y-2008) + 2008 \neq 2008 \Leftrightarrow (x-2008)(y-2008) \neq 0 \text{ adevărat .}$$

e) Se demonstrează că legea $*$ este asociativă pe $\mathbb{R} - \{2008\} \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R} - \{2008\}$

$$(x * y) * z = x * (y * z) = 2008^2(x-2008)(y-2008)(z-2008)$$

La punctul a) s-a demonstrat că legea $*$ este comutativă. (2)

Deoarece legea este comutativă, din punctul b) obținem că $\exists e = \frac{1}{2008} + 2008 \in \mathbb{R}$ elementul neutru al

legii $*$ definită pe $\mathbb{R} \setminus \{2008\}$ (3)

Deci structura algebrică $(\mathbb{R} \setminus \{2008\}, *)$ este asociativă, comutativă și are element neutru.

Se demonstrează că orice element din $\mathbb{R} \setminus \{2008\}$ este simetrizabil. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2008\}$ astfel ca

$$x * x' = x' * x = \frac{1}{2008} + 2008. \text{ Din } x * x' = \frac{1}{2008} + 2008 \text{ obținem } x' = \frac{1}{2008^2(x-2008)} + 2008$$

$$x' \in \mathbb{R} \setminus \{2008\} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2008\}. \text{ Deci } (\mathbb{R} \setminus \{2008\}, *) \text{ este grup}$$

f) Se alege $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. De exemplu $a = \sqrt{2}$. Obținem $\sqrt{2} * b = 2008(\sqrt{2} - 2008)(b - 2008) + 2008 \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow b - 2008 = \sqrt{2} + 2008 \text{ de unde } b = \sqrt{2} + 2 \cdot 2008$$