Soluție:

a) $I_1 = \frac{1}{2}$, $J_1 = \frac{1}{2}$,deci $\left(I_1 + J_1\right) = 1 \in \mathbb{Z}$

b) $a \cdot I_2 = \frac{a}{3}$, $J_2 = 2$ şi astfel $a \cdot I_2 = J_2 \Rightarrow a = 6 \in \mathbb{Z}$

c) Pentru orice $x \in [0,1]$ avem $x^{n+1} \le x^n \Rightarrow I_{n+1} \le I_n$ .Pe de altă parte $I_n = \frac{1}{n+1}, J_n = \frac{n^2}{2}$ şi astfel

$I_n = \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{2} \le \frac{n^2}{2} = J_n, \forall n \ge 1$

d) Deoarece $I_n = \frac{1}{n+1}$,suma din enunț este egală cu $2+3+4+...+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$ şi astfel $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = 14 \Rightarrow n = 4 \in \mathbb{N}$

e) $J_n = \frac{n^2}{2}$ şi astfel suma propusă este $\frac{n(n+1)}{4}$ .Din $\frac{n(n+1)}{4} \le 14 \Rightarrow n(n+1) \le 7 \cdot 8$ deducem numărul căutat : $n = 7$

f) $K_{2,1} = e^2 + 1$, $K_{1,2} = e - 2$, deci $K_{2,1} > K_{1,2}$.