Rezolvare:

a. Matricea asociată sistemului $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -a \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,

$A^2=\begin{pmatrix} a & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -a \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -a \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+3 & a+10 & 2a+3 \\ -a & 1-3a & -2a \\ a+3 & 7 & 4-3a \end{pmatrix}$.

b. Pentru $a=0$ se va obține $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, atunci $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 10 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ de unde se obține $B=\begin{pmatrix} 3 & 7 & -6 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

c. $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -a \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, de unde $\det A=a-a-3+3a^2=3a^2-3$.

d. Prima ecuație a sistemului este $ax+y+3z=11$. Înlocuind $x=1$, $y=3$ şi respectiv $z=2$, se va obține ecuația având ca necunoscută pe a: $a+3+6=11 \Leftrightarrow a=2$.

e. Sistemul (S) va avea soluție unică (este compatibil determinat) dacă şi numai dacă $\det A\neq 0$ Cum $\det A=3a^2-3$ se va obține relația $3a^2-3\neq 0 \Leftrightarrow a^2\neq 1 \Leftrightarrow a\neq \pm 1$. Aşadar, sistemul va avea soluție unică pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$

f. Pentru $a=2$ sisemul devine (S): $\begin{cases} 2x+y+3z=11 \\ \quad y-2z=-1 \\ x+3y+z=12 \end{cases}$, matricea asociată $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ cu $\det A=9$.

În acest caz vom avea $\Delta_x=\begin{vmatrix} 11 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 12 & 3 & 1 \end{vmatrix}=11-9-24-36+1+66=9$,

$\Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & 11 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 12 & 1 \end{vmatrix}=-2-22+3+48=27$, $\Delta_z=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 12 \end{vmatrix}=24-1-11+6=18$. Vom avea

$x=\dfrac{\Delta_x}{\det A}=\dfrac{9}{9}=1$

$y=\dfrac{\Delta y}{\det A}=\dfrac{27}{9}=3$

$z=\dfrac{\Delta_z}{\det A}=\dfrac{18}{9}=2$

Atunci mulțimea soluțiilor sistemului (S) este $\{(1;3;2)\}$