Rezolvare:

a. Pentru $a=2$ matricea devine $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}$,

atunci $A^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 8 & 8\\ -2 & -1 & -2\\ 6 & 10 & 11\end{pmatrix}$ şi vom obține

$A^2-3A+5I_3=\begin{pmatrix}5 & 2 & 2\\ 1 & 1 & -2\\ 0 & 4 & 7\end{pmatrix}=B$;

b. $\det A=3-2a-4+3a=a-1$, $\det A=3 \Leftrightarrow a-1=3 \Leftrightarrow a=4$

c. $\det A=3-2a-4+3a=a-1$, A este inversabilă $\Leftrightarrow \det A\neq 0$, deci A este inversabilă pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$;

d.Pentru $a=0$ matricea devine $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$, $\det A=-1$. Calculăm matricea adjunctă

$A^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0 & -2\\ 3 & -1 & -2\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$, atunci $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}A^*=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 2\\ -3 & 1 & 2\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

e. Pentru $a=0$, A este inversabilă, atunci soluția ecuației matriceale $AX=B$ va fi $X=A^{-1}B$,

$X=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 2\\ -3 & 1 & 2\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 2 & 2\\ 1 & 1 & -2\\ 0 & 4 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15 & 2 & 8\\ -14 & 3 & 6\\ 10 & 0 & -3\end{pmatrix}$;

f. $AC=\begin{pmatrix}1 & a & 2\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & a & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & 0\\ a & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4a & a^2+1 & 3\\ 2 & 2a+1 & 0\\ a+1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$CA=\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & 0\\ a & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a & 2\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & a & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a & a+1 & 3\\ 2 & 1 & 0\\ a^2+1 & 0 & 3a+1\end{pmatrix}$

Identificând elementele din egalitatea $AC=CA$ se obține $a=0$.