Soluție

1.a) Succesiv rezultă $f'(x) = x' - \ln'(1+x)$, $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x}$, $f'(x) = \dfrac{x}{1+x}$.

b) Deoarece $f'(x) > 0, \forall x \in (0,\infty)$ rezultă că *f* este strict crescătoare pe $(0,\infty)$.

Din $x > 0$ şi *f* este strict crescătoare pe $(0,\infty)$, rezultă $f(x) > f(0) = 0$.

c) $f(x) = x - \ln(1+x)$ implică $f(x) = \ln e^x - \ln(1+x)$. Rezultă $f(x) = \ln\dfrac{e^x}{1+x}$. Deci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

2.a) $F(x) = \int_1^2 t^x dt = \dfrac{t^{x+1}}{x+1}\Big|_1^2 = \dfrac{2^{x+1}-1}{x+1}$

Rezultă $(x+1)\int_1^2 t^x dt = 2^{x+1} - 1$, de unde: $1 + (x+1)\int_1^2 t^x dt = 2^{x+1}, \forall x \in \mathbb{R}$, deci $1 + (x+1)F(x) = 2^{x+1}, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Deoarece $\int_1^2 t^x dt = \dfrac{2^{x+1}-1}{x+1}$ rezultă $\lim\limits_{x\to -1}\int_1^2 t^x dx = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2^{x+1}-1}{x+1}$ .Utilizăm regula lui l´ Hôspital se obține că:

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2^{x+1}-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1} 2^{x+1}\ln 2$. Dar

$\lim\limits_{x\to -1} 2^{x+1}\ln 2 = \ln 2$, deci $\lim\limits_{x\to\infty}\int_1^2 t^x dx = \ln 2$.

c) Din teorema de existență a primitivelor unei funcții continue,
rezultă că *F* este o primitivă a funcției *f*. Deci $F'(x) = f(x), \forall x \in (-1,\infty)$.

Rezultă $f(x) = \left(\dfrac{2^{x+1}-1}{x+1}\right)' = \dfrac{(x\ln 2 + \ln 2 - 1)2^{x+1} + 1}{(x+1)^2}$.