Rezolvare

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x-2$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ fiind funcție de gradul I cu coeficientul lui x strict pozitiv.Dacă $x\in[1;3]$ atunci $f(1)\le f(x)\le f(3)$. Dar $f(1)=1;\ f(3)=7\Rightarrow \operatorname{Im} f=[1;7]$.

2.a. $f(x)\ge 1\Leftrightarrow x^2-3x+2\ge 0\Leftrightarrow x\in(-\infty,1]\cup[2,\infty)=\mathbb{S}$

Cum $\mathbb{S}\cap\mathbb{Z}=\mathbb{Z}\Rightarrow$ inegalitatea este adevărată pentru orice $x\in\mathbb{Z}$..

2.b.Înlocuind avem $\left(2-\sqrt{5}\right)^2+a\left(2-\sqrt{5}\right)+b=0\Leftrightarrow 9+2a+b-(4+a)\sqrt{5}=0$

Cum $a,b\in\mathbb{Q}$ atunci $9+2a+b=0$ și $4+a=0\ \Leftrightarrow a=-4;b=-1$.

3. $f(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1>0\\ (m+1)^2-4(m+1)\le 0\end{cases}$

Rezolvând inegalitatea obținem $(m+1)^2-4(m+1)\le 0\Leftrightarrow(m+1)(m-3)\le 0\Leftrightarrow m\in[-1,3]$

4.a. Condițiile de existență sunt $\begin{cases}3x+4\ge 0\\ x-4\ge 0\\ x\ge 0\end{cases}$

Prin ridicare la pătrat ecuația se transformă în: $3x+4+x-4+2\sqrt{3x+4}\sqrt{x-4}=4x\Leftrightarrow 2\sqrt{3x+4}\sqrt{x-4}=0\ \Leftrightarrow x=4$ sau $x=-\frac{4}{3}$.

$x=4$ verifică egalitatea ,dar $x=-\frac{4}{3}$ nu.

4.b. Condiția de existență este $x>0$ și $x\ne 1$.

Utilizând proprietațile logaritmilor avem: $2\log_8(2x)+\log_8(x-1)^2=\frac{4}{3}\Leftrightarrow 2\log_8(2x)+2\log_8|x-1|=\frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow 2\log_8 2x|x-1|=\frac{4}{3}\Leftrightarrow \log_8 2x|x-1|=\frac{2}{3}\Leftrightarrow 2x|x-1|=8^{\frac{2}{3}}\ \Leftrightarrow\ 2x|x-1|=4\Leftrightarrow x|x-1|=2.$

Dacă $x>1$ atunci ecuația devine $x^2-x-2=0$ cu soluțiile $x_1=-1,x_2=2$ dintre care admitem 2.

Dacă $x\le 1$ și $x>0$ ecuația devine $x(1-x)=2\Leftrightarrow x^2-x+2=0$ care nu are soluții reale.

Deci $\mathbb{S}=\{2\}$.