

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

a) Avem $\int g(x) dx = \ln x + C$.

b) Avem $\int_1^e f(x) dx = 1$.

c) Rezultă ușor prin ridicare la puterea a doua a ambilor membrii.

d) Avem $\int_1^{2008} f(x) \cdot g(x) dx = f^2(x) \Big|_1^{2008} - \int_1^{2008} f'(x) \cdot f(x) dx$, de unde rezultă

că $\int_1^{2008} f(x) \cdot g(x) dx = \frac{\ln^2 2008}{2}$.

e) Avem $F(x) = x \ln x - x + C$. Din $F(1) = 2008$, obținem $C = 2009$. Astfel, primitiva va fi
 $F(x) = x \ln x - x + 2009$.

f) Cum f este strict crescătoare pe $(0, +\infty)$, conform inegalității de la punctul c) rezultă că

$$\ln \frac{x+y}{2} \geq \ln \sqrt{xy} = \frac{\ln x + \ln y}{2}.$$

Punând în această ultimă inegalitate $y=1$, și integrând-o pe intervalul $[1, e]$, se obține inegalitatea cerută.