Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar
Soluţie

a) f este primitivă a unei funcții $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dacă $f(x)=\int g(x)dx \Leftrightarrow f'(x)=g(x) \Rightarrow$ funcția g este $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2$; $f\left(\sqrt{2}\right)=1+2\sqrt{2}; g\left(\sqrt{2}\right)=2 \Rightarrow 1+2\sqrt{2}>2 \Leftrightarrow 2\sqrt{2}>1 \Leftrightarrow f\left(\sqrt{2}\right)>g\left(\sqrt{2}\right)$.

b) $F(x)=\int f(x)dx=\int(1+2x)dx=x^2+x+\ell; O(0,0)\in G_{F(x)} \Rightarrow F(0)=0 \Rightarrow \ell=0 \Rightarrow F(x)=x^2+x$

c) $\int_{-1}^{1} f\left(\frac{1}{2}x^2\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(1+x^2\right)dx=\left(x+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{8}{3}$

d) $\int_0^m f(x)dx=\left(x+x^2\right)\Big|_0^m=m^2+m \Rightarrow m^2+m-12=0 \Rightarrow m_1=-4, m_2=3; m\in\mathbb{N} \Rightarrow m=3$

e) $e^x \geq 1+x, \forall x\geq 0 \Rightarrow e^x \geq f\left(\frac{1}{2}x\right)$; conform teoremei de monotonie:

$f(x)\geq g(x), \forall x\in[u;v] \Rightarrow \int_u^v f(x)dx \geq \int_u^v g(x)dx \Rightarrow$ prin înlocuire, avem $\int_0^{2008} e^x dx \geq \int_0^{2008} f\left(\frac{1}{2}x\right)dx$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x f(-t)dt}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_0^x (1+2t)dt}{\int_0^x (1-2t)dt}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(t+t^2\right)\Big|_0^x}{\left(t-t^2\right)\Big|_0^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+x^2}{x-x^2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\frac{1}{x}+1\right)}{x^2\left(\frac{1}{x}-1\right)}=\frac{0+1}{0-1}=-1$