Rezolvare

1. $f(x) \le 3 \Leftrightarrow \frac{x-1}{3} \le 3 \Leftrightarrow x-1 \le 9 \Leftrightarrow x \le 10 \Rightarrow \mathbb{S} = (-\infty;10]$

2.a. $f(x) = (x-3)(x-2)$.Deoarece $f(3) = 0$ produsul cerut este zero.

2.b. $x_1 + x_2 = 2\sqrt{2}; x_1x_2 = 1.$

Transformăm relația $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \ge \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow \frac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} \ge \frac{x_1+x_2}{x_1x_2}.$

Inlocuind avem: $\frac{(2\sqrt{2})^2 - 2}{1} \ge 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 3 \ge \sqrt{2}$ adevărat.

3.Ecuația $f(x) = 0$ are două soluții reale și distincte

dacă $\Delta > 0. \Leftrightarrow 9m^2 - 4m + 4 > 0 \Leftrightarrow 8m^2 + (m-2)^2 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$

4.a.condiția de existență este : $x - 3 \ge 0$ sau $x = 1$.

$\sqrt{(x-1)^2(x-3)} = x-1 \Rightarrow (x-1)^2(x-3) = (x-1)^2 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-4) = 0$ de unde obținem soluțiile

$x = 1; x = 4$ .Verificând ,ambele valori verifică ecuația.$\Rightarrow \mathbb{S} = \{1;4\}$

4.b. Condiția de existență : $x \ge 0$

Aplicând proprietățile logaritmilor$\Rightarrow \lg\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(5^{\sqrt{x}} + 1\right) = \lg\left(5^{1-\sqrt{x}} + 5\right) \Leftrightarrow 5^{\sqrt{x}} + 1 = 5^{3-\sqrt{x}} + 125 \Leftrightarrow$

$5^{\sqrt{x}} - 125 \cdot 5^{-\sqrt{x}} - 124 = 0.$Notăm $5^{\sqrt{x}} = t > 0, \forall x \in \mathbb{R}_+$ atunci ecuația devine

$t^2 - 124t - 125 = 0 \Leftrightarrow t_1 = -1, t_2 = 125$ .Dar -1 nu convine ,deci

$5^{\sqrt{x}} = 125 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9 \ge 0 \Rightarrow \mathbb{S} = \{9\}.$