Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) $G_{f_{a,b}} \cap Ox = A(2,0) \Rightarrow f_{a,b}(2) = 0 \Rightarrow 9a - 4b = 0; G_{f_{a,b}} \cap Oy = B(0,1) \Rightarrow f_{a,b}(0) = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = \frac{9}{4}$

b) $\int f_{-1,1}(x)dx = \int\left[-(x+1)^2 - x^2\right]dx = \int\left(-2x^2 - 2x - 1\right)dx = -2\frac{x^3}{3} - x^2 - x + \ell, \ell \in \mathbb{R}$

c) $\int_{-1}^{1} f_{1,-1}(x)dx = \int_{-1}^{1}\left[\left(x+1\right)^2 + x^2\right]dx = \int_{-1}^{1}\left(2x^2 + 2x + 1\right)dx = \left(2\frac{x^3}{3} + x^2 + x\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{10}{3}$

d) $f_{1,1}(x) - f_{1,1}(-x) = \left[(x+1)^2 - x^2\right] - \left[(-x+1)^2 - (-x)^2\right] = 4x \Rightarrow$

$\int_{-2}^{2}[f_{1,1}(x) - f_{1,1}(-x)]dx = 4\int_{-2}^{2} xdx = 4\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-2}^{2} = 0$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f_{1,2}(x)}{f_{2,1}(x)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x^2 + 2x + 1}{x^2 + 4x + 2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2 \cdot \left(-1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \cdot \left(1 + \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} = \frac{-1}{1} = -1$

f) $V_f = \pi \cdot \int_{\alpha}^{\beta} f_{a,a}^2(x)dx \Rightarrow V_f = \pi \cdot a^2 \int_{-1}^{1}\left(4x^2 + 4x + 1\right)dx = \pi \cdot a^2 \cdot \left(4\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{14 \cdot \pi \cdot a^2}{3}$

$\frac{14 \cdot \pi \cdot a^2}{3} = 378\pi \Rightarrow a^2 = \frac{3 \cdot 378 \cdot \pi}{14 \cdot \pi} = 3 \cdot 27 = 81 \Rightarrow a_{1,2} = \pm 9$