Soluție

1.a. Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}$ atunci $A+B=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ b+d & a+c \end{pmatrix}\in \mathcal{G}$.

b. Din $C^2=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 34 & 30 \\ 30 & 34 \end{pmatrix}\Rightarrow \quad C^2-10C+16I_2=\begin{pmatrix} 34 & 30 \\ 30 & 34 \end{pmatrix}-10\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}+16\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=O_2$.

c. Condiția din enunț se mai scrie $x^2-y^2=2008 \Leftrightarrow x^2-y^2=2^3\cdot 251$.

Rezolvând sistemele $\begin{cases} x+y=1 \\ x-z=2008 \end{cases}, \begin{cases} x+y=2 \\ x-z=1004 \end{cases},...,$

obținem matricele $B_1=\begin{pmatrix} 503 & 501 \\ 501 & 503 \end{pmatrix}, B_2=\begin{pmatrix} 253 & 249 \\ 249 & 253 \end{pmatrix}, B_3=\begin{pmatrix} 503 & -501 \\ -501 & 503 \end{pmatrix}, B_2=\begin{pmatrix} 253 & -249 \\ -249 & 253 \end{pmatrix}$.

2.a. Avem $f(0)=a_0 \Leftrightarrow f(0)=1^{2008}+(-1)^{2008}=1+1=2$

b. $f(1)+f(-1)=(1+1)^{2008}+(1-1)^{2008}+(-1+1)^{2008}+(-1-1)^{2008}=2^{2008}+(-2)^{2008}=2^{2009}$ care este par.

c. $f(X)=(X+1)^{2008}-(X-1)^{2008}=0 \Leftrightarrow (X+1)^{2008}=(X-1)^{2008} \Leftrightarrow X+1=X-1$ sau $X+1=-(X-1)$

cu soluția x = 0.