

Rezolvare

1. a) $A^2 = 2I_2$.

b) $A + I_2 = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. $\det(A + I_2) = 1 \neq 0$. Matricea $A + I_2$ este inversabilă.

$$(A + I_2)(A - I_2) = (A - I_2)(A + I_2) = I_2. \text{ Deci } (A + I_2)^{-1} = A - I_2.$$

c) Presupunem $X^2 = A \Rightarrow \det X^2 = \det A \Leftrightarrow (\det X)^2 = -2$ imposibil.

2. a) Prin calcul direct și exprimarea egalității obținem: $a = 3$.

b) Legea de compoziție devine $x * y = xy + 3x + 3y + 6$

$x \perp e = e \perp x = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Se observă că legea este comutativă, conform pct a). Relația precedentă se scrie: $e(x + 3) = -2(x + 3)$. Pentru $x \neq -3$ avem $e = -2$.

Verificăm dacă $e = -2$ este element neutru și pentru $x = -3$. Avem $-3 * -2 = -2 \perp -3 = -3$. Deci $e = -2$ este element neutru pentru legea de compoziție.

c) Egalitatea se mai scrie $x(a - 3) + b - 9 = 0 \Leftrightarrow a = 3$ și $b = 6$.