

Rezolvare:

a. Pentru $a = 0$ se obține $A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, așadar, $A(0) = O$, deci $O \in M$.

b. $A(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$. O matrice este inversabilă dacă și numai dacă are determinantul nenul,

$\det A(a) = 0$, deci matricea $A(a)$ nu este inversabilă.

c. $A(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$, $A(b) = \begin{pmatrix} b & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix}$. Atunci

$$A(a) \cdot A(b) = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ab & 0 & 2ab \\ 0 & 1 & 0 \\ 2ab & 0 & 2ab \end{pmatrix} \in M$$

d. Conform rezultatului obținut la punctul anterior, obținem : $A(a) \cdot A(b) = A(2ab)$, ceea ce înseamnă că vom avea $A(b) \cdot A(a) = A(2ba)$. Dar cum $a, b \in \mathbb{R}$ parametrii și înmulțirea numerelor reale este comutativă, vom avea $2ab = 2ba$ de unde $A(2ab) = A(2ba) \Leftrightarrow A(a) \cdot A(b) = A(b) \cdot A(a), (\forall) a, b \in \mathbb{R}$

e. Deja se cunoaște relația $A(a) \cdot A(b) = A(2ab)$, ceea ce va duce la $A(a) \cdot A(e) = A(2ae)$. Din

identitatea $A(a) \cdot A(e) = A(a)$ se va obține $A(2ae) = A(a) \Leftrightarrow 2ae = a \Leftrightarrow e = \frac{1}{2}$, fiind singura valoare

reală ce verifică identitatea $A(a) \cdot A(e) = A(a), (\forall) A(a) \in M$. Așadar matricea $A(e) = A\left(\frac{1}{2}\right)$

f. $A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix}$. $2A(xy) = 2 \begin{pmatrix} xy & 0 & xy \\ 0 & 1 & 0 \\ xy & 0 & xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy & 0 & 2xy \\ 0 & 1 & 0 \\ 2xy & 0 & 2xy \end{pmatrix}$,

$$A(x) \cdot A(y) = A(2xy) = \begin{pmatrix} 2xy & 0 & 2xy \\ 0 & 1 & 0 \\ 2xy & 0 & 2xy \end{pmatrix}.$$

Deci $A(x) \cdot A(y) = 2A(xy)$.