

Soluție

1. a) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{BM} = \frac{\overrightarrow{BC}}{2} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{BC}}{2}$.

1. b) $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{DC} = \frac{\overrightarrow{AD}}{2} + \overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{BC}}{2} + \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$

2. a) $m(\angle ADC) = m(\angle DAB) + m(\angle ABD) \Rightarrow m(\angle DAB) = 45^\circ$ și $m(\angle DBA) = 60^\circ \Rightarrow m(\angle ADC) = 105^\circ$.

2. b) Din teorema sinusurilor în triunghiul ABD avem: $\frac{AD}{\sin B} = \frac{BD}{\sin(\angle BAD)} \Rightarrow \frac{AD}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{BD}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow$

$$BD = AD \frac{\sqrt{6}}{3} \quad (1)$$

Din teorema sinusurilor în triunghiul ACD avem: $\frac{AD}{\sin C} = \frac{CD}{\sin(\angle CAD)} \Rightarrow \frac{AD}{\frac{1}{2}} = \frac{CD}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow CD = AD\sqrt{2} \quad (2)$

Din (1) și (2) avem $BC = BD + CD = AD \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{3} \Rightarrow AD = \frac{3BC}{\sqrt{2}(3 + \sqrt{3})} = \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{2}(3 + \sqrt{3})} = 5(3 - \sqrt{3})$

3. a) $AB: \frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow AB: \frac{y}{x - 6} = -\sqrt{3} \Rightarrow AB: y + \sqrt{3}x - 6\sqrt{3} = 0$

3. b) $OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = 6$, $OB = \sqrt{x_B^2 + y_B^2} = \sqrt{9 + 27} = 6$ și $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{9 + 27} = 6$
 $\Rightarrow OA = OB = AB \Rightarrow \triangle OAB$ echilateral.