Rezolvare

1) **a)** $f'(x)=1-\frac{e^x}{e^x+1}$, $f''(x)=\frac{-e^x}{\left(e^x+1\right)^2}<0\Rightarrow f'$ este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) Pentru $a\le 0$ este evident, iar pentru $a>0$ aplicăm regula lui l'Hospital.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\ln 1=0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1=m$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right)=0$, deci $y=0$ este o asimptotă orizontală la $+\infty$ şi $y=x$ este o asimptotă oblică la $-\infty$.

2) **a)** $I_2=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{\left(x^3+1\right)'}{x^3+1}dx=\frac{1}{3}\cdot\ln 2$.

b) $I_{n+1}-I_n=\int_0^1\frac{x^n(x-1)}{1+x^3}dx<0$.

c) $0\le I_n\le\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$ deci $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$.