

**Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

Rezolvare

$$a) \left. \begin{array}{l} x * y = axy - ab(x + y) + ab^2 + b \\ x * y = 2xy - 2 \cdot 3(x + y) + 2 \cdot 3^2 + 3 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 2; b = 3 \Rightarrow x * y = 2(x - 3)(y - 3) + 3, \quad \forall x, y \in A.$$

$$b) \left. \begin{array}{l} x \in A \setminus \{3\} \Rightarrow x - 3 > 0 \\ y \in A \setminus \{3\} \Rightarrow y - 3 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (x - 3)(y - 3) > 0 \Rightarrow 2(x - 3)(y - 3) + 3 > 3 \Rightarrow x * y \in A \setminus \{3\}.$$

$$c) \left. \begin{array}{l} x * c = c * x = c, \quad \forall x \in A \\ x * c = 2(x - 3)(c - 3) + 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(x - 3)(c - 3) = c - 3, \quad \forall x \in A \Rightarrow c = 3$$

$$d) \left. \begin{array}{l} (x * y) * z = 2^2(x - 3)(y - 3)(z - 3) + 3 = x * (y * z), \quad \forall x, y, z \in A \setminus \{3\} \text{ (asociativitatea)} \\ x * y = 2(x - 3)(y - 3) + 3 = 2(y - 3)(x - 3) + 3 = y * x, \quad \forall x, y \in A \setminus \{3\} \text{ (comutativitatea)} \end{array} \right\}$$

Fie  $e \in A \setminus \{3\}$  astfel ca  $x * e = e * x = x, \quad \forall x \in A \setminus \{3\} \Rightarrow 2(x - 3)(e - 3) + 3 = x, \quad \forall x \in A \setminus \{3\}$

$\Rightarrow e = \frac{7}{2}$  element neutru. Pentru  $\forall x \in A \setminus \{3\}, \exists x' \in A \setminus \{3\}$  astfel ca  $x * x' = x' * x = \frac{7}{2}$ .

$$2(x - 3)(x' - 3) + 3 = \frac{7}{2} \Rightarrow x' = 3 + \frac{1}{4(x - 3)}, \quad \forall x \in A \setminus \{3\}.$$

$$x > 3 \Rightarrow 3 + \frac{1}{4(x - 3)} > 3 \Rightarrow x' \in A \setminus \{3\}.$$

$$e) (\log_3 x) * (\log_x 3) = 2(\log_3 x - 3)(\log_x 27 - 3) + 3.$$

Deci ecuația devine  $2(\log_3 x - 3)(\log_x 27 - 3) = 0 \Rightarrow \log_3 x = 3$  sau  $\log_x 27 = 3 \Rightarrow x \in \{3, 27\}$ .

$$f) \text{ Cum } x * 3 = 3 \text{ și } 3 * x = 3, (\forall) x \in \mathbb{R} \text{ și } \log_3 27 = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_3 27) * (\log_3 81) * (\log_3 243) * (\log_3 729) = 3.$$