**Rezolvare**

**1.** $f\left(\sqrt{5}\right)=a\sqrt{5}+a^2-1$.Cum $f\left(\sqrt{5}\right)\in\mathbb{Q}$ și $a\in\mathbb{Q}\Rightarrow a=0.$ Atunci funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f\left(x\right)=-1$ funcție constantă,deci $\operatorname{Im}(f)=\{-1\}$.

**2.a.**Graficul funcției $f$ este tangent axei $Ox$ dacă ecuația $f\left(x\right)=0$ are o singură soluție.

$f\left(x\right)=0\Leftrightarrow x^2-2\sqrt{2}x+2=0\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{2}\right)^2=0\Leftrightarrow x_1=x_2=\sqrt{2}.$

**2.b.**Fie $x+y=S$ și $xy=P$ atunci sistemului atașăm ecuația $t^2-S\cdot t+P=0,$ adică $t^2-2\sqrt{2}t+2=0$ cu soluțiile $t_1=t_2=\sqrt{2}$ .

Atunci $x=y=\sqrt{2}$ ca urmare sistemul va avea mulțimea soluțiilor $\mathbb{S}=\left\{\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)\right\}.$

**3.**Coordonatele vărfului parabolei associate funcției $f$ sunt $x_v=-\dfrac{b}{2a}, y_v=-\dfrac{\Delta}{4a}$ .

Ceea ce revine la $x_v=1, y_v=-1+m^2.$ Punctul $V\left(1;-1+m^2\right)$ va fi în cadranul I dacă

$m^2-1>0\Leftrightarrow m\in\left(-\infty,-1\right)\cup\left(1,\infty\right).$

**4.a.**Utilizând proprietățile puterilor ecuația devine

$25\cdot 2^x=8\cdot\dfrac{5^x}{5}\Leftrightarrow 125\cdot 2^x=8\cdot 5^x\Leftrightarrow\dfrac{125}{8}=\left(\dfrac{5}{2}\right)^x\Leftrightarrow\left(\dfrac{5}{2}\right)^3=\left(\dfrac{5}{2}\right)\Leftrightarrow x=3, 3\in\mathbb{R}$ deci $\mathbb{S}=\{3\}.$

**4.b.**Folosind definiția logaritmului ecuația devine

$x^3+3x^2-27=x^3.\Leftrightarrow 3x^2=27\Leftrightarrow x^2=9\Leftrightarrow x_1=3, x_2=-3.$

Dar $x\in\mathbb{Z}, x>1\Rightarrow\mathbb{S}=\{3\}.$