

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SOLUȚIE:

- a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad G_f \cap Ox = G_f \cap Oy = \{O(0,0)\}$
- b) $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ este funcție impară $\Rightarrow G_f$ este simetric față de originea reperului cartezian $O(0,0)$.
- c) $f'(x) = \frac{-9x^2 + 3}{(3x^2 + 1)^2}; \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

Cum f' își schimbă semnul în cele două puncte $\Rightarrow f$ își schimbă monotonia iar

$A\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$ și $B\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$ sunt punctele de extrem local ale graficului funcției f

$$\Rightarrow AB = \frac{\sqrt{39}}{3}$$

d)

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$
$f'(x)$	-----	0	+++++	0	-----
$f(x)$	$\searrow \searrow \searrow \searrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow \nearrow 0 \nearrow \nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow \searrow \searrow \searrow$

$f'(x) > 0, \forall x \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ și $f'(x) < 0, \forall x \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$ f este strict crescătoare pe $\left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ și strict descrescătoare pe $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$.

- e) Analiza tabloului de variație sau simetria față de origine și monotonia pe $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right) \Rightarrow$ intervalul cerut este $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

- f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0; \quad f_{\min} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{Im}(f) = \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$