Soluție

1. a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\overset{cf.def.}{\underset{derivatei}{=}} f'(0)$ (sau cu L'H).

$f'(x)=\left(x^2+e^x\right)'=\left(x^2\right)'+\left(e^x\right)'=2x+e^x, \forall x\in\mathbb{R}$ .Deci limita cerută va fi egală cu $2\cdot 0+e^0=1$.

b) Din punctul a) $\Rightarrow f'(x)=2x+e^x$. $f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\left(2x+e^x\right)'=(2x)'+\left(e^x\right)'=2+e^x, \forall x\in\mathbb{R}$.

Cum $e^x>0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, rezultă de aici că $f''(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$ .Deci funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

c) Înlocuind f' și f'' de la a) și b) $\Rightarrow 2x+e^x-\left(2+e^x\right)+x^2+e^x=e^x-3 \Leftrightarrow x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=-1$.

2. a) $I_1=\int\limits_0^1 x(1+x)^1\,dx=\int\limits_0^1 x\,dx+\int\limits_0^1 x^2\,dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1+\left.\frac{x^3}{2}\right|_0^1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$

b) Conform ipotezei $(1+x)^n\le(1+x)^{n+1}$, $\forall x\in[0,1]$ și $\forall n\in\mathbb{N}$ .Prin înmulțirea acestei inegalități cu $x>0$ obținem $x(1+x)^n\le x(1+x)^{n+1}$ (cazul $x=0$ verifică și el inegalitatea). Integrând acum această ultimă inegalitate pe $[0,1]$ obținem $I_n\le I_{n+1}$, pentru oricare $n\in\mathbb{N}$, de unde reiese imediat că $I_{2008}\ge I_{2007}$.

c) Utilizând identitatea dată vom obține: $I_n=\int\limits_0^1 x(1+x)^n\,dx=\int\limits_0^1\left((1+x)^{n+1}-(1+x)^n\right)dx=$

$$\overset{u(x)=1+x}{\underset{u'(x)=1}{=}}\int\limits_0^1 u'(x)\cdot u^{n+1}(x)\,dx-\int\limits_0^1 u'(x)\cdot u^n(x)\,dx=\left.\frac{(1+x)^{n+2}}{n+2}\right|_0^1-\left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1=\frac{n\cdot 2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}$$