

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare.

a) $A + 2B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 - 2A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} = O_2.$

c) $xA + yB = \begin{pmatrix} -x+3y & x-y \\ -3x+3y & 3x-y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x+3y=1 \\ x-y=0 \\ -3x+3y=0 \\ 3x-y=1 \end{cases} \Rightarrow x=y=\frac{1}{2}.$

d) $AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2, BA = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2 \Rightarrow$

$\det(AB - BA) = \det(O_2) = 0 \Rightarrow AB - BA$ nu este inversabilă.

e) $m_1 = \det(A + B) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, m_2 = \det(A + 2B) = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 8, m_3 = \begin{vmatrix} 11 & -3 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} = 16,$

$\log_2 m_1 = \log_2 4 = 2, m_2 = \log_2 8 = 3, \log_2 m_3 = \log_2 16 = 4 \Rightarrow \log_2 m_1 + \log_2 m_2 + \log_2 m_3 = 9.$

f) $XY = (A - B)(A + B) = A^2 - AB + BA - B^2 \stackrel{d)}{=} A^2 - B^2, B^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = 2B,$

$XY = 2A - 2B \Rightarrow XY \in M$ pentru $a = 2, b = -2.$