

Rezolvare

1. a) $A(1) \cdot A(-1) = A(-1)$.

b) Se verifică prin calcul $(A(x))^2 = \begin{pmatrix} 5x^2 + 10x + 1 & -2x^2 - 4x \\ 10x^2 + 20x & -4x^2 - 8x + 1 \end{pmatrix} = A((x+1)^2 - 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

c) $\det A(1) = 2 \neq 0$. Deci matricea $A(1)$ este inversabilă. $A(1)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}$.

2. a) $0 = 0 + 0\sqrt{3} \notin G$ pentru că $0^2 - 3 \cdot 0^2 \neq 1$.

$1 = 1 + 0\sqrt{3}$, $0, 1 \in \mathbb{Z}$ și $1^2 - 3 \cdot 0^2 = 1$. Deci $1 \in G$.

b) Fie $x, y \in G$

$x = a + b\sqrt{3}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a^2 - 3b^2 = 1$, $y = c + d\sqrt{3}$, $c, d \in \mathbb{Z}$, $c^2 - 3d^2 = 1$

$xy = ac + 3bd + (ad + bc)\sqrt{3}$. Avem $ac + 3bd, ad + bc \in \mathbb{Z}$ și $(ac + 3bd)^2 - 3(ad + bc)^2 = 1$.

De unde rezultă concluzia.

c) $x \in G \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{a - b\sqrt{3}}{a^2 - 3b^2} = a + (-b)\sqrt{3} \in G$.