<u>Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului</u>
<u>Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar</u>

Soluții

1.a) $f' > 0 \Rightarrow f$ strict crescatoare,deci f injective

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty, f$ continua implica f surjectiva; f bijectiva , deci are loc cerinta problemei.

b) Din f continua si bijectiva rezulta ca f^{-1} este continua

$f(x_n) = 3 + \frac{1}{n+1} \Rightarrow f^{-1}\left(3 + \frac{1}{n+1}\right) = x_n$,deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} f^{-1}\left(3 + \frac{1}{n+1}\right) = f^{-1}(3) = 1$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} n(x_n - 1) = \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \left(f^{-1}\left(3 + \frac{1}{n+1}\right) - f^{-1}(3) \right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f^{-1}\left(3 + \frac{1}{n+1}\right) - f^{-1}(3)}{\frac{1}{n+1}} \cdot \frac{n}{n+1}$

Limita ceruta este $L = \left(f^{-1}\right)'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}$

2.a) $f(x) = \int_0^a \frac{1}{t+1} dt = \ln(t+1)\Big|_0^a = \ln(a+1)$.

b) Cum $\sin t \le 1, \forall t \ge 0,$ cu egalitate pentru $t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{N}$,avem :

$f(x) < \int_0^x \frac{1}{t+1} dt = \ln(t+1)\Big|_0^x = \ln(x+1)$.

c) Avem:

$f(2\pi) = \int_0^\pi \frac{\sin t}{1+t} dt + \int_\pi^{2\pi} \frac{\sin t}{1+t} dt = \int_0^\pi \frac{\sin t}{1+t} dt + \int_0^\pi \frac{\sin(\pi + y)}{1+\pi+y} dy = \int_0^\pi \frac{\sin t}{1+t} dt - \int_0^\pi \frac{\sin(y)}{1+\pi+y} dy = \int_0^\pi \frac{\pi \sin t}{(1+t)(1+\pi+t)} dt$

,de unde $f(2\pi) < \frac{\pi}{\pi+1} \int_0^\pi \frac{\sin t}{1+t} dt = \frac{\pi}{\pi+1} f(\pi) < f(\pi)$ caci $f(\pi) > 0$.