

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare:

1. Condiția: $x^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

$\log_4(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$ este soluția ecuației.

2. Relațiile lui Viète sunt: $x_1 + x_2 = \frac{2-m}{m-1}$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{-m}{m-1}$;

Egalitatea din problemă devine $\frac{2-m}{m-1} - \frac{-m}{m-1} = 2 \Leftrightarrow m = 2 \in \mathbb{Z}$.

3.

$A\left(\frac{m-1}{2}, 4\right) \in G_f \Rightarrow f\left(\frac{m-1}{2}\right) = 4$; $\frac{m-1}{2} + m = 4 \Leftrightarrow m = 3$.

4. Notăm: $m(\hat{A}) = A$, $m(\hat{B}) = B$, $m(\hat{C}) = C$, iar cu a, b, c lungimile laturilor BC, AC , respectiv AB ;

În $\triangle ABC$ ($m(\angle A = 90^\circ)$) $\Rightarrow \sin B = \frac{b}{a}$; $\sin C = \frac{c}{a}$; $\cos B = \frac{c}{a}$; $\cos C = \frac{b}{a}$;

$$(\sin B + \sin C)^2 + (\cos B - \cos C)^2 = \left(\frac{b+c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c-b}{a}\right)^2 = \frac{2(b^2 + c^2)}{a^2} = \frac{2a^2}{a^2} = 2 \in \mathbb{Z}.$$

5. Punctul $M \in [AB]$, $[AM] \equiv [MB]$; Punctul $N \in [CD]$, $[CN] \equiv [ND]$;

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$ (1); $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$ (2); Dar $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$; $\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$; (3)

Adunând relațiile 1,2,3 se obține: $2 \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

6. Se amplifică fiecare fracție cu conjugata numitorului

$$\frac{\sqrt{2}-1}{2-1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{4-3} + \dots + \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{n-n+1} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{n}-1 = 3 \Leftrightarrow \sqrt{n} = 4 \Leftrightarrow n = 16.$$