Soluție.

1. a) $(4n)^2 = 16n^2 = 4\cdot(4n^2)$, $(4n+1)^2 = 4(4n^2+2n)+1$, $(4n+2)^2 = 4(4n^2+4n+1)$ şi $(4n+3)^2 = 4(4n^2+6n+2)+1$, de unde rezultă că un pătrat perfect este de forma $4k$ sau $4k+1$, $k\in\mathbb{N}$. Deci, $A\cap B=\varnothing$.

b) Avem că $a,b\in\{10,14,18,22,26,30,34,38,42\}$. Suma $a+b$, în condițiile problemei, este multiplu de 4, cea mai mică valoare a sumei este 24 şi cea mai mare valoare a sumei este 80. Se deduce uşor că orice multiplu de 4 cuprins între 24 şi 80 se scrie sub forma $a+b$ cu $a,b\in A,\ a\neq b,\ 10\le a,b\le 42$. De la 24 până la 80 sunt cincisprezece multipli ai lui 4 (se iau în calcul şi capetele), deci mulțimea $\{a+b \mid a,b\in A,\ a\neq b,\ 10\le a,b\le 42\}$ are 15 elemente.

2. Notăm cu q rația progresiei şi din având în vedere că a_1,a_2,a_3,a_4 şi a_5 sunt numere reale pozitive, avem că $q>0$. Din relația $\log_4\frac{a_5}{a_1}=-2$, obținem $\log_4(q^4)=-2 \Leftrightarrow q=\frac{1}{2}$. Mai departe, avem că $\log_4(a_1a_2a_3a_4a_5)=10 \Leftrightarrow a_1^5q^{10}=4^{10} \Leftrightarrow a_1q^2=16 \Leftrightarrow a_1=64$. Deci, $a_1=64,\ a_2=32,\ a_3=16,\ a_4=8,\ a_5=4$.

3. Numărul numerelor de patru cifre ce se formează cu ajutorul cifrelor $0,1,2,3$ astfel încât în fiecare număr să nu fie cifre identice este egal cu $4!-3!=18$, iar dintre acestea sunt $2!=2$ numere de forma $\overline{20**}$. Probabilitatea este egală cu $\frac{2}{18}=\frac{1}{9}$.

4. a) Numărul funcțiilor strict crescătoare de forma $f:\{0,1\}\to\{1,2,3,4\}$ coincide cu numărul submulțimilor de două elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4\}$, adică avem 6 funcții strict crescătoare de forma $f:\{0,1\}\to\{1,2,3,4\}$

b) Avem că $g(-x)=\frac{3(-x)^5}{4\cdot(-x)^2+1}=-\frac{3x^5}{4\cdot x^2+1}=-g(x)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$, de unde obținem că funcția g este impară.