Rezolvare

1.Dacă $f(0)=2008$ atunci $b=2008$ .Dar $f\left(\sqrt{2}\right)\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow a\sqrt{2}+2008\in\mathbb{Q}$. a este rațional,prin urmare $a=0$.

Așadar $f(x)=2008$,funcție constantă deci $\operatorname{Im}(f)=\{2008\}$.

2.a) Calculăm coordonatele vârfului: $x=\dfrac{2m}{2m}=1, y=f(1)=-2m+2$.

Într-adevăr punctele de coordonate $(1,2-2m)$ satisfac ecuația $x=1$,deci vârfurile parabolelor associate sunt pe dreapta de ecuație $x=1$.

b) $x_1x_2=\dfrac{2-m}{m}=1\Leftrightarrow 2-m=m\Leftrightarrow m=1$

Dacă $m=1$ atunci ecuația devine $x^2-2x+1=0\Leftrightarrow(x-1)^2=0\Leftrightarrow x_1=x_2=1$

3.Inecuația $0<f(x)\Leftrightarrow 0<2x^2+2x+1$.Folosind regula semnului funcției de gradul doi, $\Delta=4-8=-4$ atunci f are semnul strict pozitiv pe $\mathbb{R}$.

Altfel: $2x^2+2x+1=x^2+(x+1)^2$. $f(x)$ fiind sumă de două pătrate perfecte $\Rightarrow f(x)\geq 0$.

Cum x^2 respectiv $(x+1)^2$ nu sunt simultan nule $\Rightarrow f(x)$ este strict pozitiv pentru fiecare valoare reală a lui x.

4.a)

$\log_3\left(1+\log_2\left(1+3\log_2 x\right)\right)=1\Leftrightarrow 1+\log_2\left(1+3\log_2 x\right)=3$

$\Leftrightarrow \log_2\left(1+3\log_2 x\right)=2\Leftrightarrow 1+3\log_2 x=4\Leftrightarrow \log_2 x=1\Leftrightarrow x=2\in\mathbb{Q}_+^*$

$x=2$ satisface ecuația (se verifică prin calcul direct)ca urmare $\mathbb{S}=\{2\}$.

b) Condiția de existență este $25-x^2\geq 0$.

$x+\sqrt{25-x^2}=7$

$\Leftrightarrow\sqrt{25-x^2}=7-x\Rightarrow 25-x^2=49-14x+x^2\Leftrightarrow 2x^2-14x+24=0\Leftrightarrow x^2-7x+12=0\Leftrightarrow x_1=4, x_2=3$ Ambele valori satisfac ecuația deci $\mathbb{S}=\{3;4\}$.