

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) Dacă $x = \sqrt{3}$ și $y = -\sqrt{3}$, atunci $x * y = \frac{\sqrt{3} \cdot (-\sqrt{3}) - 6}{\sqrt{3} + (-\sqrt{3}) - 5} = \frac{9}{5} < \frac{5}{2}$. Deci $x * y \in I$

b) Fie $x, y \in I_1$. Se demonstrează că $x * y \in I_1$.

$$x * y \in I_1 \Leftrightarrow \frac{xy - 6}{x + y - 5} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{xy - 2x - 2y + 4}{x + y - 5} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x - 2)(y - 2)}{x + y - 5} \leq 0 \text{ adevărat } \forall x, y \in (-\infty, 2].$$

c) Legea "*" este asociativă pe $I_1 = (-\infty, 2] \Leftrightarrow \forall x, y, z \in I_1 (x * y) * z = x * (y * z)$

$$(x * y) * z = \left(\frac{xy - 6}{x + y - 5} \right) * z = \frac{\frac{xy - 6}{x + y - 5} \cdot z - 6}{\frac{xy - 6}{x + y - 5} + z - 5} = \frac{xyz - 6x - 6y - 6z + 30}{xy + xz + yz - 5x - 5y - 5z + 19}.$$

Prin calcul $x * (y * z) = \frac{xyz - 6x - 6y - 6z + 30}{xy + xz + yz - 5x - 5y - 5z + 19}.$

d) $x * 2 = 2 \Leftrightarrow \frac{x \cdot 2 - 6}{x + 2 - 5} = 2 \Leftrightarrow \frac{2(x - 3)}{x - 3} = 2 \text{ adevărat } \forall x \in (-\infty, 2].$

Deci mulțimea soluțiilor ecuației este $S = I_1$.

e) Presupunem că $\exists e \in I_1$ astfel încât $\forall x \in I_1 \quad x * e = e * x = x$. Din $x * e = x \quad \forall x \in I_1$ obținem

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad \forall x \in I_1, \text{ absurd. Deci legea "*" nu admite element neutru pe mulțimea } I_1.$$

f) Datorită asociativității legii "*" și a punctelor b) și d)

$$A = (-2008) * (-2007) * \dots * 0 * 1 * 2 = \left[\underbrace{(-2008) * (-2007) * \dots * 0 * 1}_{x \in I_1} \right] * 2 = x * 2 = 2.$$