

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

1a. c. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x+2} \right) = 2.$

.b. Din $\left(\frac{x}{x+1} \right)' = \frac{1}{(x+1)^2}$ și $\left(\frac{x+1}{x+2} \right)' = \frac{1}{(x+2)^2}$. Avem $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2}.$

c. Din $f(0) = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$ și f crescătoare pe $[0, \infty)$ obținem $\frac{1}{2} \leq f(x) < 2, \forall x \in [0, \infty).$

2.a. $I_1(x) = \int_0^x I_0(t) dt = x.$

b. $Aria \Gamma_{I_2} = \int_0^1 I_2(x) dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^3}{6} \Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$

c. Fie $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - e^x$. Atunci $f'(x) = 1 + x - e^x$ și $f''(x) = 1 - e^x$. Se demonstrează că $x = 0$ este punct de maxim pentru f' și $f \Rightarrow f(x) \leq f(0) \Rightarrow$ relația cerută.