Rezolvare

1. $f(0)=b,\ f(10)=10a+b$ deci avem de rezolvat sistemul: $\begin{cases} b=10 \\ 10a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=10 \end{cases}$.

2.a. $A\in G_f \Leftrightarrow f(0)=-1 \Rightarrow c=-1$

$B\in G_f \Leftrightarrow f(3)=-1 \Leftrightarrow 9a+3b=0$

$C\in G_f \Leftrightarrow f\left(\frac{3}{2}\right)=2 \Leftrightarrow \frac{3}{4}a+\frac{1}{2}b=1$

Rezolvând sistemul $\begin{cases} 9a+3b=0 \\ \frac{3}{4}a+\frac{1}{2}b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+b=0 \\ 3a+2b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{4}{3} \\ b=4 \end{cases}$

Deci funcția căutată este $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-\frac{4}{3}x^2+4x-1$.

2.b. Ecuația are rădacini reale dacă $p^2-12\geq 0, (*)$

Din relațiile lui Viete $x_1^2+x_2^2=p^2-2\cdot 3$.

$x_1^2+x_2^2=19 \Leftrightarrow p^2=25 \Leftrightarrow p=\pm 5.$ Ambele valori satisfac condiția $(*)$.

3. Coordonatele vțrfului sunt $x_v=-\frac{b}{2a}, y_v=-\frac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow x_v=a; y_v=-a^2+1.$

Vârful parabolei associate este pe dreaptă dacă

$y_v=2x_v \Leftrightarrow -a^2+1=2a \Leftrightarrow a^2+2a-1=0 \Leftrightarrow a_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}$

4.a. $\sqrt[3]{x^3+4x^2+3x-3}=x+1, x\in\mathbb{R}_+$

Ridicând la puterea a treia ecuația devine

$x^3+4x^2+3x-3=x^3+3x^2+3x+1 \Leftrightarrow x^2-4=0 \Leftrightarrow x=2$ sau $x=-2$.

Dar $-2<0$, prin urmare $\mathbb{S}=\{2\}$

4.b. Condițiile de existență sunt $x^2-4x>0$ și $4-x>0$.

Folosind proprietațile logaritmilor ecuația devine

$\lg\left(x^2-4x\right)=\lg(4-x) \Leftrightarrow x^2-4x=4-x \Leftrightarrow x^2-3x-4=0 \Leftrightarrow x_1=-1, x_2=4.$

Înlociund $x=-1$ satisface ecuația, $x=4$ nu verifică condiția de existență, deci $\mathbb{S}=\{-1\}$.