rezolvare

1a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \arcsin 0 = 0$.

b) Funcția este derivabilă pentru $-1 < \dfrac{2x}{1+x^2} < 1$, adică $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$. În punctele ± 1, derivatele laterale sunt diferite, deci funcția nu este derivabilă.

c) Deoarece arcsin este funcție strict crescătoare, punctele de extrem ale funcției f coincid cu cele ale funcției $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$. Acestea sunt ± 1.

2a) $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\dfrac{2}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \dfrac{2}{3}$.

b) $V = \pi \int_0^1 (1-x^2)\,dx = \dfrac{2\pi}{3}$.

c) $a_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ sunt sume Riemann pentru funcția f, diviziunile $D_n = \left(0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, ..., \dfrac{n}{n}\right)$ și punctele intermediare $X_n = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, ..., \dfrac{n}{n}\right)$. Deoarece funcția este integrabilă și șirul normelor diviziunilor tinde la 0, șirul sumelor Riemann este convergent.