Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) $f'(x) == \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x\cdot(x+1)^2}, x>0$

b) Convine $f'(x)=\frac{2}{9} \Leftrightarrow 2x^3-5x^2+20x-9=0 \Leftrightarrow (2x-1)\left(x^2-2x+9\right)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

Deoarece $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln 2+\frac{2}{3} \Rightarrow A\left(\frac{1}{2};-\ln 2+\frac{2}{3}\right)$ este punctul cautat.

c) Din subpunctul a) deducem ca $f'(x)>0, \forall x>1, f'(1)=0$ Deoarece functia f este strict crescatoare pe $[1,\infty)$ si $f(1)=0$,rezulta ca $f(x)\geq 0, \forall x\in[1;\infty)$,de unde se deduce inegalitatea de demonstrat.

2.a) Se arata ca f este strict descrescatoare
Se aplica teorema de medie (sau teorema lui Lagrange pentru o primitiva a functiei f).

b) $\int_1^n f(x)dx=\int_1^n x^{-2}dx=\left.\frac{-1}{x}\right|_1^n=1-\frac{1}{n}$ .Atunci limita ceruta este egala cu 1.

c) Deoarece $\int_1^n f(x)dx=\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)dx$ sumand inegalitatile de la a) obtinem:

$$\sum_{k=2}^{n} f(k)\leq \int_1^n f(x)dx \Rightarrow a_n - f(1)\leq \int_1^n f(x)dx \Rightarrow a_n \leq \int_1^n f(x)dx+1 \to 2,$$

deci sirul este marginit superior.Sirul fiind si crescator ,este convergent.