

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție:

a) $G_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ suma elementelor matricei este 4

b) $A^2 = \begin{pmatrix} (1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) & 0 \\ 0 & (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) \end{pmatrix} = -I_2$

$$A^2 + I_2 = -I_2 + I_2 = O_2$$

c) $G_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b(1+\sqrt{2}) \\ b(1-\sqrt{2}) & a \end{pmatrix} \Rightarrow \det(G_{a,b}) = a^2 + b^2$

d) $G_{a,b}$ neinvertibilă $\Leftrightarrow \det(G_{a,b}) = 0$

$$a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0 \Rightarrow G_{0,0} \text{ este singura matrice neinvertibilă}$$

e) $G_{a,b} \cdot G_{a,b}^{-1} = G_{a,b}^{-1} \cdot G_{a,b} = I_2$

$$G_{a,b} \cdot G_{\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}} = \frac{a^2}{a^2+b^2} I_2 + \frac{-ab}{a^2+b^2} A + \frac{ba}{a^2+b^2} A + \frac{-b^2}{a^2+b^2} A^2 = I_2$$

f) $G_{a,1}^{-1} \in G \Rightarrow \frac{a}{a^2+1} \in \mathbb{Z}, \frac{-1}{a^2+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = 0$