Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) $f'(x)=\dfrac{6x^2}{\left(x^3+1\right)^2}$ $f'(0)=0$, f(0)=-1 y+1=0

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$, y=1 asimptota orizontala spre $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$, y=1 asimptota orizontala spre $-\infty$

$\lim\limits_{x\nearrow-1} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\searrow-1} f(x)=+\infty$, x=-1 asimptota verticala

c) $\dfrac{\mathrm{k}^3-1}{k^3+1}=\dfrac{(k-1)\big(k(k+1)+1\big)}{(k+1)\big(k(k-1)+1\big)}$

$\dfrac{3}{2}f(2)f(3)...f(n)=\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n}\right)^{n^2}=e$

2.a) $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx$ $\quad I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\cos 2x}{2}dx=\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin 2x}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$I_2=\dfrac{\pi}{4}$

b) $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x(-\cos x)'dx=-\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x dx$

$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\cos^2 x)dx=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$

de unde rezulta relatia

c) $\sin x\le x, \forall x\ge 0$, de unde avem $0\le\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^n x dx\le\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}x^n dx=\dfrac{\pi}{3(n+1)}$,

deci limita cautata este 0.