

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $7 * x = 7x - 7(7 + x) + 7^2 + 7 = 7, \forall x \in \mathbb{R}.$

b) $(x - 7)(y - 7) + 7 = xy - 7x - 7y + 7^2 + 7 = x * y, \forall x, y \in \mathbb{R}.$

c) Se demonstrează că $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x * y) * z = x * (y * z) = (x - 7)(y - 7)(z - 7)$

d) $x * y = \left(6 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(6 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 7 \left(6 + \frac{1}{\sqrt{2}} + 6 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 7^2 + 7 = \frac{15}{2} \in M$

e) Se demonstrează că $\exists e \in M$ a.î. $\forall x \in M \quad x * e = e * x = x$. Se obține $e = 8 \in M$.

Fie $x \in M$. Se studiază dacă $\exists x' \in M$ a.î. $x * x' = x' * x = 8$.

Se obține $x' = \frac{1}{x-7} + 7 \in M \Leftrightarrow x = 6$ sau $x = 8$.

Deci singurele elemente sinetizabile în raport cu legea "*" sunt 6 și 8.

f) Utilizând proprietatea de asociativitate a legii "*" și punctu a) se obține $1 * 2 * \dots * 2008 = 7$