Rezolvare:

a. Pentru $a=0$ se obține $A(0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, aşadar, $A(0)=I_2$, deci $I_2 \in M$ .

b. $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. O matrice este inversabilă dacă şi numai dacă are determinantul nenul, $\det A(a)=1$, deci matricea $A(a)$ este inversabilă $(\forall) a \in \mathbb{R}$.

c. $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A(b)=\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Atunci $A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & b+a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in M$

d. Conform rezultatului obținut la punctul anterior, obținem : $A(a)\cdot A(b)=A(a+b)$, ceea ce înseamnă că vom avea $A(b)\cdot A(a)=A(b+a)$. Dar cum $a,b\in\mathbb{R}$ parametrii şi adunarea numerelor reale este comutativă, vom avea $a+b=b+a$ de unde
$A(a+b)=A(b+a)\Leftrightarrow A(a)\cdot A(b)=A(b)\cdot A(b),(\forall)a,b\in\mathbb{R}$

e. Deja se cunoaşte relația $A(a)\cdot A(b)=A(a+b)$, ceea ce va duce la $A(a)\cdot A(e)=A(a+e)$. Din identitatea $A(a)\cdot A(e)=A(a)$ se va obține $A(a+e)=A(a)\Leftrightarrow a+e=a\Leftrightarrow e=0$, fiind singura valoare reală ce verifică identitatea $A(a)\cdot A(e)=A(a),(\forall)A(a)\in M$ . Aşadar matricea $A(e)=A(0)$

f. $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. De unde se va obține $A(x+y)=\begin{pmatrix}1 & x+y\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,

$A(x)\cdot A(y)=A(x+y)=\begin{pmatrix}1 & x+y\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Deci $A(x+y)=A(x)\cdot A(y),\ \ \forall x,y\in\mathbb{R}$.