

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

1. a. $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \Rightarrow f'(0) = 0$.

b. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \Rightarrow y=0$ ecuația asimptotei orizontale la $+\infty$.

c. $f'(x) = 0 \Rightarrow x=e$ punct de maxim $\Rightarrow f(x) \leq f(e), \forall x \in (0, \infty) \Rightarrow \frac{\ln x}{x} \leq \frac{\ln e}{e} \Rightarrow e \ln x \leq x \ln e$

$\Rightarrow \ln x^e \leq \ln e^x, \forall x > 0$

2.a. $\int_0^4 f^2(x) dx = \left(16x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^4 = \frac{128}{3}$

b. $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{16-x^2}} dx = -\sqrt{16-x^2} \Big|_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} = 0$

c. Avem $0 \leq \sqrt{16-x^2} \leq \frac{4+x+4-x}{2}$. Integrăm pe $[0, m]$ și

obținem $0 \leq \int_0^m f(x) dx \leq 4x \Big|_0^m \Rightarrow 0 \leq \int_0^m f(x) dx \leq 4m \leq 8$.