SOLUȚIE:

a) f este continuă pe $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ f este continuă în $x=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=f(2) \Leftrightarrow b=a+4$.

b) Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă este derivabilă în $x=2$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{x^2+x+5-11}{x-2}=\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{(x-2)(x+3)}{x-2}=5;$$

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{5x-10}{x-2}=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{5(x-2)}{x-2}=5 \Rightarrow$ f este derivabilă în $x=2 \Rightarrow f$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$

c) $-1<2 \Rightarrow f'(-1)=2(-1)+1 \Rightarrow f'(-1)=-1$

d) $g(x)=1 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$.

Tangenta la G_g în punctul $(0,1)$ este: $t: y=g'(0)\cdot x+1 \Leftrightarrow t: y=x+1$.

$h(x)=x+1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{e-1} \Rightarrow G_h \cap t=\left\{\left(\frac{1}{e-1},\frac{e}{e-1}\right)\right\}$.

e) Fie $f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_1(x)=g(x)-h(x)$; $f_1'(x)=e^x-e \Rightarrow f_1'(x)<0, \forall x\in(-\infty,1)$ şi $f_1'(x)>0, \forall x\in(1,\infty) \Rightarrow f_1$ este descrescătoare pe $(-\infty,1]$ şi crescătoare pe $[1,\infty)$

$f_1(1)=0 \Rightarrow f_1(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$, adică $e^x-ex\geq 0, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow e^{x-1}\geq x, \forall x\in\mathbb{R}$.

f) $t:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, t(x)=g(x)-h(x) \Rightarrow t(x)=e^x-ex\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Din $e) \Rightarrow g(x)\geq h(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

$t(x)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ şi $t(1)=0 \Rightarrow t(x)\geq t(1)\ \forall x\in\mathbb{R}$

Cum funcția t este strict monotonă pe intervalele $(-\infty,1]$, respectiv $[1,\infty) \Rightarrow x=1$ este singurul punct de extrem al funcției t.