Soluții

1.a) $f'(x)=arctgx-\frac{x}{x^2+1}$; $f''(x)=\frac{2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\geq 0$,deci f este convexa.

b) $f''(x)\geq 0 \Rightarrow f'$ este crescatoare Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\frac{\pi}{2}, \lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=\frac{\pi}{2}$,
se obține concluzia.

c) $f'(0)=0$ si f' crescatoare pe $\mathbb{R} \Rightarrow f'(x)\leq 0, x<0; f'(x)\geq 0, x>0$ Deducem ca $x=0$ este punct de minim pentru f,deci $f(x)\geq f(0)=0, \forall x\in\mathbb{R}$.

2.a) $I_1=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln 2.$

b) $x\in[0;1]\Rightarrow 0\leq\frac{x^n}{1+x^{2n}}\leq x^n$

Integreaza inegalitatile anterioare si obtine cerinta problemei .

c)Avem ca $I_n\geq 0$ deoarece functia de integrat este pozitiva.Folosind b) si teorema clestelui se deduce ca limita ceruta este egala cu 0.