

**Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

Rezolvare

a)  $x \perp y + \frac{(2-x)(2-y)}{2} - 2 = x + y - \frac{xy}{2} + \frac{4-2x-2y+xy}{2} - 2 = 0, \forall x, y \in \mathbb{Q}.$

$$x \perp y = 2 - \frac{(2-x)(2-y)}{2}, \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$

b) Demonstrăm că:  $(x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z), \forall x, y, z \in \mathbb{Q}$  și că  $x \perp y = y \perp x, \forall x, y \in \mathbb{Q}.$

$$(x \perp y) \perp z = \left( 2 - \frac{(2-x)(2-y)}{2} \right) \perp z = \frac{\frac{(2-x)(2-y)}{2}(2-z)}{2} = \frac{(2-x)(2-y)(2-z)}{4} =$$

$x \perp (y \perp z), \forall x, y, z \in \mathbb{Q}.$  Analog pentru  $x \perp y, y \perp x, \forall x, y \in \mathbb{Q}.$

c)  $e \in \mathbb{Q}$  astfel ca  $x \perp e = e \perp x = x, \forall x \in \mathbb{Q}.$

$$\text{Dar } x \perp e = 2 - \frac{(2-x)(2-e)}{2}, \forall x \in \mathbb{Q} \Rightarrow 2 - \frac{(2-x)(2-e)}{2} = x, \forall x \in \mathbb{Q}. \Rightarrow e = 0.$$

d) Căutăm  $a \in \mathbb{Q}$  astfel ca  $x \perp a = a, \forall x \in \mathbb{Q}.$  Dar  $x \perp a = 2 - \frac{(2-x)(2-a)}{2}, \forall x \in \mathbb{Q}$

$$\text{Deci } 2 - \frac{(2-x)(2-a)}{2} = a, \forall x \in \mathbb{Q}. \Rightarrow a = 2.$$

e) Din punctele anterioare,  $(M, \perp)$  monoid comutativ. Se demonstrează că  $\forall x \in M, \exists x' \in M$  așa încât

$$x \perp x' = x' \perp x = 0. \text{ Dar } x \perp x' = 2 - \frac{(2-x)(2-x')}{2}$$

$$\Rightarrow x' = 2 - \frac{4}{2-x} \in M, \forall x \in M, \text{ deci } (M, \perp) \text{ grup comutativ}$$

f) Folosind punctul d) se obține că  $(-8) \perp (-7) \perp \dots \perp 0 \perp 1 \perp 2 \perp \dots \perp 8 = 2.$