

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) Fie $x = \sqrt{7}$, $y = 5$, atunci $x * y = \frac{xy - 6}{x + y - 5} = \frac{5\sqrt{7} - 6}{\sqrt{7}} = 5 - \frac{6}{\sqrt{7}} > \frac{5}{2}$. Deci $x * y \in I$.

b) Fie $x, y \in I_1$. Se demonstrează că $x * y \in I_1$.

$$x * y \in I_1 \Leftrightarrow \frac{xy - 6}{x + y - 5} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{xy - 3x - 3y + 9}{x + y - 5} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-3)(y-3)}{x + y - 5} \geq 0 \text{ adevărat } \forall x, y \in [3, \infty).$$

c) Legea "*" este asociativă $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in I_1 (x * y) * z = x * (y * z)$

$$(x * y) * z = \left(\frac{xy - 6}{x + y - 5} \right) * z = \frac{\frac{xy - 6}{x + y - 5} \cdot z - 6}{\frac{xy - 6}{x + y - 5} + z - 5} = \frac{xyz - 6x - 6y - 6z + 30}{xy + xz + yz - 5x - 5y - 5z + 19}.$$

Prin calcul $x * (y * z) = \frac{xyz - 6x - 6y - 6z + 30}{xy + xz + yz - 5x - 5y - 5z + 19}.$

d) $3 * x = 3 \Leftrightarrow \frac{3 \cdot x - 6}{3 + x - 5} = 3 \Leftrightarrow \frac{3(x-2)}{(x-2)} = 3$ adevărat $\forall x \in [3, \infty)$

Deci mulțimea soluțiilor ecuației este $S = I_1$

e) Presupunem că $\exists e \in I_1$ astfel încât $\forall x \in I_1 \quad x * e = e * x = x$. Din $x * e = x \quad \forall x \in I_1$ obținem $x^2 - 5x + 6 = 0 \quad \forall x \in I_1$, absurd. Deci legea "*" nu admite element neutru pe mulțimea I_1 .

f) Datorită asociativității legii "*" și a punctelor b) și d)

$$A = 3 * 4 * 5 * \dots * 2007 * 2008 = 3 * \left[\underbrace{4 * 5 * \dots * 2007 * 2008}_{x \in I_1} \right] = 3 * x = 3.$$