Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) $f_n'(x) = n\cdot\left(x^{n-1}-1\right), x\geq 0$ $f_n'(1)=0$; $f_n'(x)<0, x\in[0,1)$; $f_n'(x)>0, x>1$,de unde rezulta concluzia.

b) f_n este continua, strict descrescatoare pe $[0,1]$ si $f_n(0)\cdot f_n(1)<0 \Rightarrow$ o rad.in $(0,1)$

f_n este continua,strict cresc. pe $[1,\infty)$, $f_n(1)<0, \lim\limits_{x\to\infty} f_n(x)=\infty \Rightarrow$ o rad.in $(1,\infty)$.

c) $f_n\left(\frac{2}{n}\right)<0, f_n(0)>0$,deci $a_n\in\left(0,\frac{2}{n}\right)\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

2.a) $I_0 = arctgx\Big|_0^1$,deci $I_0=\frac{\pi}{4}$.

b) $I_{2n}+I_{2n-2}=\int_0^1\frac{x^{2n-2}\cdot\left(x^2+1\right)}{x^2+1}dx$; $I_{2n}+I_{2n-2}=\frac{1}{2n-1}, n\geq 2$.

c) Dem. prin inductie (sau foloseste b)): $I_{2n}\cdot(-1)^{n-1}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-...+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2n-1}-I_0$. Arata ca $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$ si apoi ca limita ceruta este I_0 .