Rezolvare

1.a. Din $f'(x)=\dfrac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}$.

b. $f(0)=\dfrac{1}{2},\ f'(0)=\dfrac{1}{4}\Rightarrow f(0)+f'(0)=\dfrac{3}{4}$.

c. $f''(x)\ge 0,\ \forall x\in[0,1]\Rightarrow f'$ crescătoare pe $[0,1]\Rightarrow f'(0)\le f'(x)\le f'(1),\ \forall x\in[0,1]$ și $f'(x)\ge 0, \forall x\in[0,1]$

$\Rightarrow f$ crescătoare pe $[0,1]\Rightarrow f(0)\le f(x)\le f(1)\Rightarrow \dfrac{1}{f(1)}\le\dfrac{1}{f(x)}\le\dfrac{1}{f(0)}$. Finalizare.

2.a. $F(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x e^{-t}dt=-e^{-t}\Big|_0^x=-e^{-x}+1=-f(x)+1$

b. $h''(x)=(F-f)''(x)=f'(x)-f''(x)$ și $f''(x)=e^{-x}$, $(F-f)''(x)=-2e^{-x}\Rightarrow h$ concavă pe $\mathbb{R}$.

c. $\int_0^x tf(t^2)dt=\int_0^x te^{-t^2}dt=-\dfrac{1}{2}e^{-t}\Big|_0^x=-\dfrac{1}{2}e^{-x^2}+\dfrac{1}{2}$. Deci, $L=\dfrac{1}{2}$