

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție.

1. a) Mulțimea A are 2009 elemente, la mijlocul șirului $\frac{1}{2009}, \frac{2}{2008}, \frac{3}{2007}, \dots, \frac{2008}{2}, \frac{2009}{1}$ este fracția reductibilă $\frac{1005}{1005}$, iar dacă fracția $\frac{a}{b}$ este ireductibilă, atunci fracția $\frac{b}{a}$ este ireductibilă și reciproc, dacă fracția $\frac{b}{a}$ este ireductibilă, atunci fracția $\frac{a}{b}$ este ireductibilă. Prin urmare, numărul fracțiilor ireductibile din mulțimea A este par.

b) Avem de calculat $\log_3 \frac{1}{2009} + \log_3 \frac{2}{2008} + \log_3 \frac{3}{2007} + \dots + \log_3 \frac{2007}{3} + \log_3 \frac{2008}{2} + \log_3 \frac{2009}{1} =$
 $\log_3 \left(\frac{1}{2009} \cdot \frac{2}{2008} \cdot \frac{3}{2007} \cdot \dots \cdot \frac{1004}{1006} \cdot \frac{1005}{1005} \cdot \frac{1006}{1004} \cdot \dots \cdot \frac{2008}{2} \cdot \frac{2009}{1} \right) = \log_3 1 = 0$

2. Dacă r este rația progresiei avem că $a_1 + 5r = 17$ și $a_1 + 8r = 26$, de unde obținem $a_1 = 2$ și $r = 3$. În final, $S_{15} = a_1 + a_2 + \dots + a_{15} = \frac{(2a_1 + 14r) \cdot 15}{2} = 345$.

3. Prețul obiectului, fără TVA, din magazinul comerciantului este $120 \cdot \frac{100+15}{100} = 138$ lei și prețul cu TVA este $138 \cdot \frac{100+19}{100} = 164,22$ lei.

4. a) Avem că $f(1) = -1, f(2) = 9, f(3) = -23, f(4) = 65$, deci $G_f \cap \{(1,0), (2,9), (3,-15), (4,65)\} = \{(2,9), (4,65)\}$.

b) Pentru orice număr natural n nenul avem că $f(2n) = 2^{2n+1} \cdot n + 1$ și $f(2n+2) = 2^{2n+3} \cdot (n+1) + 1$.

Deoarece, $2^{2n+1} \cdot n + 1 < 2^{2n+3} \cdot n + 1 < 2^{2n+3} \cdot (n+1) + 1$, rezultă că $0 < f(2n) < f(2n+2)$ pentru orice număr natural n nenul. Am obținut șirul crescător de numere naturale

$f(2) < f(4) < f(6) < \dots < f(2n) < f(2n+2) < \dots$, de unde rezultă că funcția f este nemărginită.