Soluție

a) Funcția f este impară dacă $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

$f(-x) = \dfrac{-x}{1+x} = -f(x).$

b) Funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$, nu are asimptote verticale.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$ asimptotă orizontală spre ∞,

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1 \Rightarrow y = -1$ asimptotă orizontală spre $-\infty$.

c) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = |x|.$

d) Se derivează funcția $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x}, x < 0 \\ \dfrac{x}{1+x}, x \ge 0 \end{cases}$

e) Din tabelul de variație

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ ∞
$f'(x)$	+ + + + + + + + + + + + + +
$f(x)$	-1 ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ 1

$\Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

f) $|a+b| \le |a| + |b|, \forall a, b \in \mathbb{R}.$

Funcția f strict crescătoare pe $\mathbb{R} \Rightarrow f(|a+b|) \le f(|a|+|b|), \forall a, b \in \mathbb{R}$.

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \le \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} = \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \le \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$