Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) Integrând prin părți, avem: $F(x)=\int f(x)dx=\int \ln x dx=\int (x)' \cdot \ln x dx = x\cdot \ln x-\int x\cdot (\ln x)' dx=$

$x\cdot \ln x-\int x\cdot \frac{1}{x}dx = x\cdot \ln x-\int 1dx = x\cdot \ln x - x+\ell; A(1,0)\in G_{F(x)} \Rightarrow F(1)=0\Rightarrow \ell=1\Rightarrow F(x)=x\cdot \ln x-x+1$

b) $u+\frac{1}{u}\geq 2, \forall u\in (0,+\infty)\Leftrightarrow \frac{u^2+1}{u}\geq 2\Leftrightarrow u^2+1\geq 2u\Leftrightarrow u^2-2u+1\geq 0\Leftrightarrow (u-1)^2\geq 0$

deoarece pătratul oricărui număr real este pozitiv

c) $\int_1^{\sqrt{2008}} f(e^{2008x})dx=\int_1^{\sqrt{2008}} 2008x dx=2008\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^{\sqrt{2008}}=2008\cdot \frac{2007}{2}=1004\cdot 2007\in \mathbb{N}$

d) Integrând prin părți, avem: $\int_1^2 f(\frac{1}{x})dx=\int_1^2 \ln\left(\frac{1}{x}\right)dx=-\int_1^2 (x)'\cdot \ln x dx=-x\cdot \ln x\Big|_1^2+\int_1^2 x\cdot (\ln x)' dx\Rightarrow$

$\int_1^2 f(\frac{1}{x})dx=-2\ln 2+x\Big|_1^2=1-2\ln 2$

e) Din **b)** avem $f(x)+\frac{1}{f(x)}\geq 2, \forall x\in \mathbb{R}_+^*, x\neq 1\Rightarrow \ln x=f(x)\neq 0\Rightarrow$

$m=2$ pentru funcția $g:[a,b]\to \mathbb{R}, g(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}, 1<a\leq b$

prin înlocuire în teorema de medie: $m(u-v)\leq \int_v^u f(x)dx \leq M(u-v)\Rightarrow \int_a^b \left[f(x)+\frac{1}{f(x)}\right]dx\geq 2(b-a)$

f) Integrând prin părți, avem: $\int_{e^{-1}}^{e^2} \frac{f(x)}{x}dx=\int_{e^{-1}}^{e^2} \frac{\ln x}{x}dx=\int_{e^{-1}}^{e^2} \ln x\cdot \frac{1}{x}dx=\int_{e^{-1}}^{e^2} \ln x\cdot (\ln x)' dx\Rightarrow$

$2\int_{e^{-1}}^{e^2} \frac{f(x)}{x}dx=3\Rightarrow \int_{e^{-1}}^{e^2} \frac{f(x)}{x}dx=\frac{3}{2}$