Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) Se derivează folosind formula de derivare a produsului.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{f'(x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x+1}=1$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=(f')'(0)=2$ sau $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{xe^x-x}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}+1=2$

d) $x\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)\geq 2x, x>0, e^x>0 \Leftrightarrow \left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)\geq 2 \Leftrightarrow \frac{\left(e^x-1\right)^2}{e^x}\geq 0$

e) $f'(x)=0\Rightarrow x=-1$

x	$-\infty$ $\qquad$ -1 $\qquad$ ∞
$f'(x)$	$- - - - - - - - - - 0 + + + + + + + + + +$
$f(x)$	$\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow -\frac{1}{e}\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow$

Funcția are un punct de extrem local.

f) $xe^{x+1}+1=0\Leftrightarrow xe^x=-\frac{1}{e}$, $f(x)\geq -\frac{1}{e}, \forall x\in\mathbb{R}$, din punctul e).

$x=-1$ soluție unică.