<u>Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului</u>
<u>Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar</u>

Rezolvare

a) $x*y=xy-\sqrt{2}(x+y)+2+\sqrt{2}=xy-\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+2+\sqrt{2}=$
$=x\left(y-\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}\left(y-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}=\left(x-\sqrt{2}\right)\left(y-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}\ \forall x,y\in\mathbb{R}$

b) $x*\sqrt{2}=\left(x-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}=\sqrt{2}\ \forall x\in\mathbb{R}$..

c) Se demonstrează că $\forall x,y,z\in\mathbb{R}\,(x*y)*z=x*(y*z)=\left(x-\sqrt{2}\right)\left(y-\sqrt{2}\right)\left(z-\sqrt{2}\right)$

d) Se arată că $\exists e\in\mathbb{R}$ astfel încât $x*e=e*x=x,\forall x\in\mathbb{R}$.

Existența elementului e se determină din $x*e=x,\forall x\in\mathbb{R}$ de unde se obține $e=\sqrt{2}+1$ Apartenența lui e la $\mathbb{R}$ este evidentă: $\sqrt{2}+1\in\mathbb{R}$.

Se demonstrează că legea $*$ este comutativă pe $\mathbb{R}$ adică $x*y=y*x,\forall x,y\in\mathbb{R}$

Deci $\exists e=\sqrt{2}+1\in\mathbb{R}$ astfel încât $x*e=e*x=x,\forall x\in\mathbb{R}$

e) Pentru ca structura algebrică $(\mathbb{R},*)$ să fie grup este necesar ca orice element al mulțimii $\mathbb{R}$ să fie simetrizabil în raport cu legea $*$, adică $\forall x\in\mathbb{R},\exists x'\in\mathbb{R}$ astfel încât $x*x'=x'*x=\sqrt{2}+1$. Deducem că $x'=\dfrac{1}{x-\sqrt{2}}+\sqrt{2}\in\mathbb{R},\forall x\neq\sqrt{2}$, deci $\sqrt{2}$ nu este simetrizabil în raport cu legea $*$, de unde rezultă că structura algebrică $(\mathbb{R},*)$ nu este grup.

f) Datorită asociativității legii $*$, grupând termenii și ținând cont de cerința b), obținem:

$\left[\underbrace{\left(-\sqrt{3}\right)*\left(-\sqrt{2}\right)*(-1)*0*1*\left(\sqrt{3}\right)}_{\alpha}\right]*\left(\sqrt{2}\right)=\alpha*\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}$, unde am notat cu

$\alpha=\left(-\sqrt{3}\right)*\left(-\sqrt{2}\right)*(-1)*0*1*\left(\sqrt{3}\right)\in\mathbb{R}$