

Soluții

1.a) $A \cdot A^t = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix}.$

b) $f(0) = \det(A \cdot A^t + 0 \cdot B) = \det(A \cdot A^t) = \det(A) \cdot \det(A^t) = (\det A)^2 \geq 0$

c) Fie $f(x) = \begin{vmatrix} a^2 + b^2 + x & ac + bd + x \\ ac + bd + x & c^2 + d^2 + x \end{vmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ac - 2bd)x + (ad - bc)^2.$

$m = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ac - 2bd, n = (ad - bc)^2$

2.a) Pentru $q = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \in G.$

b) Fie $x = \cos q\pi + i \sin q\pi, y = \cos r\pi + i \sin r\pi, q, r \in \mathbb{Q}.$ Atunci $xy = \cos(q+r)\pi + i \sin(q+r)\pi \in G.$

c) Rădăcinile polinomului f sunt numerele complexe

$z_k = \cos \frac{2k\pi}{6} + i \sin \frac{2k\pi}{6} = \cos \frac{k\pi}{3} + i \sin \frac{k\pi}{3}, k = 0, 1, \dots, 5.$ Cum $\frac{k}{3} \in \mathbb{Q},$ pentru orice $k = 0, 1, \dots, 5,$ rezultă că f are toate rădăcinile în $G.$