Soluție

1.a) Deoarece $\lim\limits_{x\searrow -2} f(x) = \lim\limits_{x\searrow -2} \ln\frac{2+x}{2-x} = -\infty$ şi $\lim\limits_{x\nearrow 2} f(x) = \lim\limits_{x\nearrow 2} \ln\frac{2+x}{2-x} = \infty$, rezultă ecuațiile asimptotelor: $x=-2$ (asimptotă verticală la dreapta) şi $x=2$ (asimptotă verticală la stânga).

b) Deoarece $f'(x) = \frac{2-x}{2+x}\left(\frac{2+x}{2-x}\right)' = \frac{4}{4-x^2}$ rezultă $f'(x) > 0, \forall x \in (-2,2)$, deci f este strict crescătoare pe $(-2,2)$.

c) Notăm $\frac{1}{x} = y$. Atunci $y \to 0$ când $x \to \infty$. Deci $\lim\limits_{x\to\infty} xf\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{y} f(y)$.Cum $\lim\limits_{y\to 0}\frac{f(y)}{y} = f'(0) = 1$, rezultă $\lim\limits_{x\to\infty} xf\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

2.a) $f(t) = t^2\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx - 2t\int_1^2 \frac{e^x}{x}dx + \int_1^2 e^{2x}dx$. Rezultă $f(t) = At^2 - 2Bt + C$, unde $C = \int_1^2 e^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{2}\Big|_1^2 = \frac{e^4 - e^2}{2}$.

b)Prin urmare:

$f(t) = A\left(t - \frac{B}{A}\right)^2 + \frac{AC - B^2}{A}$. Deoarece $A = \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{2}$, rezultă

$f(t) = A(t-2B)^2 + 2\left(AC - B^2\right)$, de unde $f(2B - t) = At^2 + 2\left(AC - B^2\right) = f(2B + t), \forall t \in \mathbb{R}$

Prin urmare $f(2B - t) = At^2 + 2\left(AC - B^2\right) = f(2B + t), \forall t \in \mathbb{R}$.

c) Deoarece $f(t) = At^2 - 2Bt + C \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$, rezultă $4B^2 - 4AC \leq 0$,

adică $B^2 \leq AC$ din care rezultă $\left(\int_1^2 \frac{e^x}{x}dx\right)^2 \leq \left(\int_1^2 e^{2x}dx\right)\left(\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx\right)$.