

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) Dacă $x = \sqrt{5}$ și $y = 3$, atunci $x * y = \frac{3\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5} + 3 - 3} = \frac{3\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5}} = 3 - \frac{2}{\sqrt{5}} > \frac{3}{2}$. Deci $x * y \in I$

b) Fie $x, y \in I_1$. Se demonstrează că $x * y \in I_1$.

$$x * y \in I_1 \Leftrightarrow \frac{xy - 2}{x + y - 3} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{xy - 2 - 2x - 2y + 6}{x + y - 3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x - 2)(y - 2)}{x + y - 3} \geq 0 \text{ adevărat } \forall x, y \in [2, \infty).$$

c) Scrie că legea "*" este asociativă $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in I_1 (x * y) * z = x * (y * z)$

$$(x * y) * z = \left(\frac{xy - 2}{x + y - 3} \right) * z = \frac{\frac{xy - 2}{x + y - 3} \cdot z - 2}{\frac{xy - 2}{x + y - 3} + z - 3} = \frac{xyz - 2x - 2y - 2z + 6}{xy + xz + yz - 3x - 3y - 3z + 7}.$$

$$\text{Prin calcul } x * (y * z) = \frac{xyz - 2x - 2y - 2z + 6}{xy + xz + yz - 3x - 3y - 3z + 7}.$$

$$d) 2 * x = 2 \Leftrightarrow \frac{2 \cdot x - 2}{2 + x - 3} = 2 \Leftrightarrow \frac{2(x - 1)}{(x - 1)} = 2 \text{ adevărat } \forall x \in [2, \infty)$$

Deci mulțimea soluțiilor ecuației este $S = I_1$.

e) Presupunem că $\exists e \in I_1$ astfel încât $\forall x \in I_1 \quad x * e = e * x = x$. Din $x * e = x \quad \forall x \in I_1$ obținem $x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \forall x \in I_1$, absurd. Deci legea "*" nu admite element neutru pe mulțimea I_1 .

f) Datorită asociativității legii "*" a punctelor b) și d)

$$A = 2 * 3 * 4 * \dots * 2007 * 2008 = 2 * \left[\underbrace{3 * 4 * \dots * 2007 * 2008}_{x \in I_1} \right] = 2 * x = 2.$$