SOLUȚIE:

a) $f'(x)=e^x+xe^x \Rightarrow f'(x)=e^x(x+1)$

b) $f(x)<x^2+x \Leftrightarrow xe^x-x^2-x<0 \Leftrightarrow x\left(e^x-x-1\right)<0$.

Fie $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(x)=e^x-x-1$. $h'(x)=e^x-1$ care are rădăcina unică $x=0$;

$h'(x)<0, \forall x<0$ și $h'(x)>0, \forall x>0 \Rightarrow h$ este descrescătoare pe $(-\infty,0]$ și crescătoare pe $[0,\infty)$.

Cum $h(0)=0 \Rightarrow h(x)>0, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow x\cdot h(x)<0, \forall x<0$ și $x\cdot h(x)>0, \forall x>0$

c) $f'(x)=e^x(x+1)$, $f'(0)=1$ și $f(0)=0$ Tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă 0 are ecuația $y=x$

d) Punctul de minim local al graficului funcției f este $M\left(-1,-\frac{1}{e}\right)$

$MO=\sqrt{x_M^2+y_M^2}=\sqrt{1+\frac{1}{e^2}}=\frac{\sqrt{e^2+1}}{e}$

e) f este strict crescătoare pe $[-1,1]$. $f(-1)=-\frac{1}{e}$ și $f(1)=e \Rightarrow -\frac{1}{e}\le f(x)\le e, \forall x\in[-1,1]$.

f) f este continuă pe $\mathbb{R} \Leftrightarrow f$ este continuă în $x=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x^2=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(mx+n) \Leftrightarrow m+n=1$.