Soluție

1. a) Fie M mijlocul segmentului $[AC]$, $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MG}$.

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GB} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{GB}}{2}$

1. b) Fie N şi P mijlocul segmentelor $[BC]$ respectiv $[AB]$.

$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PG} = \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{GC}}{2}$, $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{NG} = \frac{\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{GA}}{2} \Rightarrow$

$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}}{2} = -\frac{\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}}{2} \Rightarrow \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$

2. a) Din teorema sinusurilor în triunghiul ABC avem: $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \frac{3\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{BC}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow BC = 3\sqrt{3}$.

2. b) Din teorema cosinusului în triunghiul ABC avem $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A \Rightarrow$
$AC^2 + 3\sqrt{2} \cdot AC - 9 = 0 \Rightarrow AC = -3\sqrt{2} \pm 3\sqrt{6}$, $AC > 0 \Rightarrow AC = -3\sqrt{2} + 3\sqrt{6} = 3\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$.

3. a) $BC : \frac{y - y_C}{x - x_C} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} \Rightarrow BC : \frac{y+2}{x} = -\sqrt{3} \Rightarrow BC : y + \sqrt{3}x + 2 = 0$

3. b) $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = 2\sqrt{3}$, $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = 2\sqrt{3}$ şi
$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow AC = AB = BC \Rightarrow$ triunghiul ABC este echilateral.