Soluție

1. a) Din primele două ecuații rezultă că dacă $\left(x_0, y_0, 0, 0\right)$ este soluție, atunci $x_0 = 0,\ y_0 = \frac{1}{3}$. Din a treia ecuație rezultă $p = -2$

b) Matricea sistemului, notată A, conține minorul $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 21 \neq 0$, deci $\operatorname{rang} A \geq 2,\ \forall\ m, n \in \mathbb{R}$.

c) Dacă $\operatorname{rang} A = 2$, orice minor de ordin 3 al matricei A este nul. Se obține astfel $m = 2,\ n = -12.$ Alegând minorul principal $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 21 \neq 0,$ din teorema Rouché rezultă $p = -2.$

2. a) Se verifică prin calcul direct asociativitatea și comutativitatea. Elementul neutru este $\left(1, 0\right)$ iar simetricul unui element $\left(q, k\right)$ este elementul $\left(\frac{1}{q}, -k\right) \in G.$

b) $\left(1,1\right) * \left(1,2\right) * ... * \left(1,10\right) = \left(1, 1+2+...+10\right) = \left(1, 55\right)$.

c) f morfism: $f\left(\left(q_1, k_1\right) * \left(q_2, k_2\right)\right) = q_1 q_2 2^{k_1+k_2} = f\left(q_1, k_1\right) \cdot f\left(q_2, k_2\right), \forall \left(q_1, k_1\right), \left(q_2, k_2\right) \in G$

f injectivă: Fie $\left(q_1, k_1\right), \left(q_2, k_2\right) \in G$, $q_1 = \frac{m_1}{n_1}$ și $q_2 = \frac{m_2}{n_2},\ m_1, n_1, m_2, n_2 \in \mathbb{Z}$ impare astfel încât $f\left(q_1, k_1\right) = f\left(q_2, k_2\right)$. Dacă $k_1 \neq k_2$, fără a restrânge generalitatea, putem presupune $k_1 < k_2$. Atunci, din $q_1 \cdot 2^{k_1} = q_2 \cdot 2^{k_2}$ rezultă $m_1 n_2 = 2^{k_2 - k_1} m_2 n_1$, contradicție, deoarece membrul stâng este impar, iar membrul drept este par. Ca urmare, $k_1 = k_2$, de unde $q_1 = q_2$.

f surjectivă: pentru orice număr rațional $r = \frac{m}{n},\ m, n \in \mathbb{Z}^*,$ există $m_1, n_1 \in \mathbb{Z}$ impare și $a, b \in \mathbb{N}$ astfel încât $m = 2^a m_1$ și $n = 2^b n_1$. Notând $q = \frac{m_1}{n_1},\ k = a - b,$ rezultă $f\left(q, k\right) = \frac{m}{n}.$