Rezolvare

1. Se notează cu A intersecția graficului lui f cu axa Ox, B intersecția graficului lui f cu axa Oy.

Coordonatele lui A sunt $x=\dfrac{1}{m^2+1}, y=0;$ coordonatele lui B sunt $x=0, y=-1.$

Atunci $\mathbb{S}_{AOB}=\dfrac{|-1|\cdot\dfrac{1}{m^2+1}}{2}=\dfrac{1}{2\left(m^2+1\right)}$;

$\dfrac{1}{2\left(m^2+1\right)}=\dfrac{1}{10}\Leftrightarrow m^2+1=5\Leftrightarrow m^2=4\Leftrightarrow m=2$ sau $m=-2.$

2.a. $f(x)\le\dfrac{5}{4},\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow -x^2+x+1\le\dfrac{5}{4},\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow -\left(x^2-x+\dfrac{1}{4}\right)\le 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}.$

2.b. $E=\left(x_1+x_2\right)^3=\left(-\dfrac{b}{2a}\right)^3=1.$

3. Pentru ca $f(x)\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$ trebuie să aibă loc condițiile : $\begin{cases}a<0\\ \Delta\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<0\\ m^2+4(1-m)\le 0\end{cases}$

Rezolvând inecuația $m^2+4-4m\le 0\Leftrightarrow(m-2)^2\le 0.$ Dar $(m-2)^2\ge 0,\forall m\in\mathbb{R}$ atunci $m=2\in\mathbb{Z}.$

4.a. Notăm $2^{\lg x}=t, t>0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}_+^*$.

Ecuația devine $t+\dfrac{1}{t}=5\Leftrightarrow t^2-5t+4=0\Leftrightarrow t_1=1, t_2=4.$

Înlocuind $2^{\lg x}=1\Leftrightarrow\lg x=0\Leftrightarrow x=1\in\mathbb{R}_+^*.$ sau $2^{\lg x}=4\Leftrightarrow\lg x=2\Leftrightarrow x=100\in\mathbb{R}_+^*.$ Deci $\mathbb{S}=\{1;100\}$

4.b. $\sqrt[3]{x^2+x-5}=-\sqrt[3]{x^2-5}\Leftrightarrow\sqrt[3]{x^2+x-5}=\sqrt[3]{-x^2+5}\Leftrightarrow x^2+x-5=-x^2+5$

$\Leftrightarrow 2x^2+x-10=0\Leftrightarrow x_1=2\in\mathbb{Z}, x_2=-\dfrac{5}{2}\notin\mathbb{Z}$ deci $\mathbb{S}=\{2\}.$