Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum şi Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție:

a) $\int_0^1 f(x)dx = \left(\frac{x^4}{4} + 3\cdot\frac{x^3}{3} + x^2\right)\Big|_0^1$ şi $\int_0^1 f(x)dx = \frac{9}{4}$

b) $\int_0^y \left(g(x) - x^2\right)dx = \int_0^y (2x+2)\,dx$ şi $\int_0^y \left(g(x) - x^2\right)dx = 8 \Rightarrow y^2 + 2y = 8$. Cum $y \in \mathbb{N}$,deducem $y = 2$

c) $x^2 + 2x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ şi deci G derivabilă , cu derivata $G^{/}(x) = g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .Aşadar G este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ şi se ajunge la inegalitatea cerută

d) $\int_0^1 \left(g(x) - x^2\right)\cdot e^x dx = \int_0^1 (2x+2)\cdot e^x dx$. Integrare prin părți şi $\int_0^1 \left(g(x) - x^2\right)\cdot e^x dx = 2e$

e) $\mathcal{A} = \int_0^k f(x)dx$,deci $\mathcal{A} = \int_0^k f(x)dx = \frac{k^4}{4} + k^3 + k^2$ şi $\frac{k^4}{4} + k^3 + k^2 > \frac{1}{4} + 1 + 1 = \frac{9}{4}, \forall k > 1$

f) $x^2 + 2x + 2 \geq x, \forall x > 0$ conduce la $\int_1^n \frac{1}{g(x)}dx \leq \int_1^n \frac{1}{x}dx = \ln n$.