Rezolvare

1. $f(x)\le 0 \Leftrightarrow -\left(1-\sqrt{3}\right)x+2\le 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{3}-1\right)x\le -2 \Leftrightarrow x\le \dfrac{-2}{\sqrt{3}-1} \Leftrightarrow \ x\le -\left(\sqrt{3}+1\right) \Leftrightarrow x\in\left(-\infty,-\left(\sqrt{3}+1\right)\right].$

2.a. $f\left(\dfrac{5}{8}+r\right)=4r^2-\dfrac{25}{16}+4$ și $f\left(\dfrac{5}{8}-r\right)=4r^2-\dfrac{25}{16}+4$,deci egalitatea are loc pentru orice $r>0.$

2.b. Notăm $S=x+y=6, P=xy=a$ și formăm ecuația de gradul II, $t^2-6t+a=0.$
Calculăm $\Delta=36-4a.$ Dacă $\Delta=0\Leftrightarrow a=9$ atunci $t_{1,2}=3$ deci $x=y=3.$
Prin urmare pentru $a=9$ sistemul va avea exact o soluție: $\mathbb{S}=\left\{(3,3)\right\}.$

3. $f(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta\le 0 \end{cases}.$

$\Delta\le 0\Leftrightarrow (m+1)^2-4\le 0\Leftrightarrow m\in[-3;1].$

4.a. Condiția de existență este $1+3x\ge 0.$
$\sqrt{1+3x}=1-x\Rightarrow 1+3x=1-2x+x^2 \Leftrightarrow x^2+5x=0\Leftrightarrow x=0; x=5$.
Verificând,constatăm că $x=0$ satisface,iar $x=5$ nu satisface ecuația,deci $\mathbb{S}=\{0\}.$

4.b. Condițiile de existență sunt: $\begin{cases} 9^{x-1}+7>0 \\ 3^{x-1}+1>0 \end{cases}$
Aplicând proprietățile logaritmilor obținem :
$9^{x-1}+7=4\left(3^{x-1}+1\right)\Leftrightarrow \left(3^{x-1}\right)^2-4\cdot 3^{x-1}+3=0\Leftrightarrow \left(3^{x-1}-1\right)\left(3^{x-1}-3\right)=0 \Leftrightarrow 3^{x-1}=1 \text{ sau } 3^{x-1}=3$
$\Leftrightarrow x=1$ sau $x=2.$ Ambele valori satisfac ecuația,deci $\mathbb{S}=\{1;2\}.$