

**Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

Soluții

1.a)  $f'(x) = \arctg x - \frac{x}{x^2 + 1}$ ;  $f''(x) = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \geq 0$ , deci  $f$  este convexa.

b)  $f''(x) \geq 0 \Rightarrow f'$  este crescătoare. Cum  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\frac{\pi}{2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \frac{\pi}{2}$ ,  
se obține concluzia.

c)  $f'(0) = 0$  și  $f'$  crescătoare pe  $\mathbb{R} \Rightarrow f'(x) \leq 0, x < 0$ ;  $f'(x) \geq 0, x > 0$ . Deducem că  $x = 0$  este punct de minim pentru  $f$ , deci  $f(x) \geq f(0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

2.a)  $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$ .

b)  $x \in [0;1] \Rightarrow 0 \leq \frac{x^n}{1+x^{2n}} \leq x^n$

Integrează inegalitățile anterioare și obține cerința problemei.

c) Avem că  $I_n \geq 0$  deoarece funcția de integrat este pozitivă. Folosind b) și teorema cleștelui se deduce că limita cerută este egală cu 0.