Soluție

1.a) Deoarece se obține prin operații cu funcții continue pe $\mathbb{R}$, f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci şi pe $[-1,1]$.

f este derivabilă pe $(-\infty,0)$ şi $f'(x)=\dfrac{x^2-4}{\left(x^2+4\right)^2}$, deci f este derivabilă în -1 şi

$f'(-1)=-\dfrac{3}{25}<0$. Analog, f este derivabilă pe $(0,\infty)$, deci f este derivabilă în 1 şi $f'(1)=\dfrac{3}{25}>0$.
Rezultă că $f\in A$.

b) $\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{-x}{x\left(x^2+4\right)}=-\dfrac{1}{4}\Rightarrow f$ derivabilă la stânga în 0 şi $f_s'(0)=-\dfrac{1}{4}$.

$\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{x}{x\left(x^2+4\right)}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow f$ derivabilă la dreapta în 0 şi $f_d'(0)=\dfrac{1}{4}$. Deoarece

$f_d'(0)\neq f_s'(0)$ rezultă că f nu este derivabilă în 0.

c) Funcția g, fiind continuă pe $[-1,1]$, este mărginită şi își atinge marginile.

Deoarece $g'(-1)<0$ există $\alpha\in(-1,1)$ aşa încât $\dfrac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}<0,\forall x\in(-1,\alpha)$. Aceasta implică $g(x)<g(-1),\forall x\in(-1,\alpha)$. De aici deducem că minimul funcției continue g nu poate fi atins în –1. Analog, minimul funcției continue g nu poate fi atins în 1. Deci minimul funcției g este atins într-un punct $x_0\in(-1,1)$.

2. a) $F'(x)=\left(ax^2+(2a+b)x+b+c\right)e^x$.

Deoarece F este o primitivă a lui f, rezultă $F'(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}$. Prin urmare rezultă $a=1,b=-3,c=3$.

b) Aria cerută este egală cu $\int\limits_0^1|f(x)|dx=\int\limits_0^1\left|x(x-1)\right|e^x dx=-\int\limits_0^1 x(x-1)e^x dx$. Dar

$\int\limits_0^1 x(x-1)e^x dx=\left(x^2-3x+3\right)e^x\Big|_0^1=e-3$. Deci aria cerută este egală cu $3-e$.

c) $Vol\left(C_f\right)=\pi\int\limits_0^1 f^2(x)dx=\pi\int\limits_0^1 x^2(1-x)^2e^{2x}dx=\pi\int\limits_0^1\left(x^4-2x^3+x^2\right)e^{2x}dx$.

Fie $G(x)=\left(ax^4+bx^3+cx^2+dx+p\right)e^{2x}$ o primitivă a lui $g(x)=\left(x^4-2x^3+x^2\right)e^{2x}$. Din $G'(x)=g(x),\forall x\in\mathbb{R}$ rezultă $a=\dfrac{1}{2},b=-2,c=\dfrac{7}{2},d=-\dfrac{7}{2},p=\dfrac{7}{4}$.

Prin urmare $\int\limits_0^1\left(x^4-2x^3+x^2\right)e^{2x}dx=\left(\dfrac{1}{2}x^4-2x^3+\dfrac{7}{2}x^2-\dfrac{7}{2}x+\dfrac{7}{4}\right)e^{2x}\Big|_0^1=\dfrac{15e^2-7}{4}$, deci

$Vol\left(C_g\right)=\dfrac{\pi}{4}\left(15e^2-7\right)$.