

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) $1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{x(x-1) + x - (x-1)}{x(x-1)} = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x} = f(x), x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}.$

b) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$ asimptotă orizontală spre $\pm\infty$

\Rightarrow graficul funcției nu are asimptotă oblică

$$\left. \begin{array}{l} l_s(0) = \lim_{x \nearrow 0} f(x) = +\infty \\ l_d(0) = \lim_{x \searrow 0} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow x = 0 \text{ asimptotă verticală}$$

$$\left. \begin{array}{l} l_s(1) = \lim_{x \nearrow 1} f(x) = -\infty \\ l_d(1) = \lim_{x \searrow 1} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow x = 1 \text{ asimptotă verticală}$$

c) $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{-2x+1}{x^2(x-1)^2}, x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}.$

d) $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$

$$y - \frac{3}{2} = -\frac{3}{4}(x - 2) \Rightarrow 4y + 3x - 12 = 0$$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} x[f(x+1) + f(x+2) + \dots + f(x+2008)] =$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left[1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + 1 + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \dots + 1 + \frac{1}{x+2007} - \frac{1}{x+2008} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(2008 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2008} \right) = +\infty$$

f) f continuă în $x=1 \Rightarrow l_s(1) = l_d(1) = g(1) \Rightarrow 2a - 5 = a^2 - 13$

$$a^2 - 2a - 8 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} \Rightarrow a_1 = 4, a_2 = -2.$$