Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) $f(1)=\frac{1-\ln 1}{1+\ln 1}=1$; $f(e)=\frac{e-\ln e}{e+\ln e}=\frac{e-1}{e+1}$. Deci $f(1)+f(e)=1+\frac{e-1}{e+1}=\frac{2e}{1+e}$.

b) $f'(x)=\left(\frac{x-\ln x}{x+\ln x}\right)'=\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)(x+\ln x)-\left(1+\frac{1}{x}\right)(x-\ln x)}{(x+\ln x)^2}=\frac{2(\ln x-1)}{(x+\ln x)^2}, \quad \forall x\geq 1$

c) $g(x)=\frac{f'(x)}{(f(x)+1)^2}\overset{cf.b)}{=}\frac{\frac{2(\ln x-1)}{(x+\ln x)^2}}{\left(\frac{x-\ln x}{x+\ln x}+1\right)^2}=\frac{\ln x-1}{2x^2}, \quad \forall x\in[1,+\infty)$. Avem $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x-1}{2x^2}\underset{L'H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}$

$\underset{L'H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x-1)'}{(2x^2)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{4x^2}=0\Rightarrow$ $y=0$ este asimptotă orizontală la G_g către $+\infty$.

2. a) Au loc succesiv egalitățile $\int_0^1 f'(x)dx=f(x)\Big|_0^1=f(1)-f(0)=\ln 2-\ln 1=\ln 2$.

b) $\int g(x)dx=\int\frac{2x}{x^2+1}dx\underset{u'(x)=2x}{\overset{u(x)=x^2+1}{=}}\int\frac{u'(x)}{u(x)}dx=\ln|u(x)|+\mathcal{C}=\ln\left|\underbrace{x^2+1}_{>0}\right|+\mathcal{C}=f(x)+\mathcal{C}.$

c) $\int_1^2\frac{g(x)}{f^2(x)}dx=\int_1^2 f'(x)\cdot f^{-2}(x)dx=-\frac{1}{f(x)}\Big|_1^2=-\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(1)}=\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 5}$