Soluție

1.a) $f'(x)=3x^2-\dfrac{3}{x^2}$.

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=0.$

c) $f'(x)=0 \Leftrightarrow x_1=1, x_2=-1.$ Din tabelul de variație rezultă f crescătoare pe $(-\infty,-1)$ și pe $(1,\infty)$, f descrescătoare pe $(-1,0)$ și pe $(0,1)$.

2.a) $V=\pi\int_0^1 f^2(x)\,dx=\pi\int_0^1 x^2\left(2-x^2\right)dx=\pi\left(\dfrac{2x^3}{3}-\dfrac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=\dfrac{7\pi}{15}$.

b) $\int_0^1 x\sqrt{2-x^2}\,dx=\int_2^1 -\dfrac{1}{2}\sqrt{t}\,dt=\int_1^2 \dfrac{1}{2}\sqrt{t}\,dt=\dfrac{2\sqrt{2}-1}{3}.$

c) $\int_0^x f(t)\,dt=F(x)-F(0)$, unde F este o primitivă a funcției f,

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{2x}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$