

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $10 * x = r$ unde r este restul împărțirii lui $10 \cdot x$ la 10

Cum $(10 \cdot x) : 10 = x$ rest 0 obținem $10 * x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{N}$

b) Deoarece $*$ este asociativă, $5 * 5 * 5 * 5 * 5 = 5 * (5 * 5) * (5 * 5) = 5 * (5 * 5) = 5 * 5 = 5$

c) Se scrie tabla legii de compoziție " $*$ " pe mulțimea I

$*$	1	3	5	7	9
1	1	3	5	7	9
3	3	9	5	1	7
5	5	5	5	5	5
7	7	1	5	9	3
9	9	7	5	3	1

De aici se obține că $\forall x, y \in I \quad x * y \in I$.

d) Din tabla legii de compoziție " $*$ " pe mulțimea $I \setminus \{5\}$ obținem că $\forall x, y \in I \setminus \{5\} \quad x * y \in I \setminus \{5\}$, obținem că legea " $*$ " este comutativă, tabla legii " $*$ " fiind simetrică față de diagonala principală, că 1 este elementul neutru al legii " $*$ " pe mulțimea $I \setminus \{5\}$ și ca orice element din mulțimea $I \setminus \{5\}$ este simetrizabil în raport cu legea " $*$ ": $1' = 1, 3' = 7, 7' = 3, 9' = 9$. Legea " $*$ " fiind și asociativă obținem că $(I \setminus \{5\}, *)$ grup comutativ.

e) Deoarece " $*$ " este asociativă pe \mathbb{N} avem $A = 2 * 4 * 6 * \dots * 2008 = \underbrace{(2 * 4 * 6 * 8)}_x * 10 * \underbrace{(12 * \dots * 2008)}_y =$

$$= x * (10 * y) = x * 0 = 0$$

f) Se presupune că legea de compoziție " $*$ ", considerată pe mulțimea \mathbb{N} , admite element neutru, adică există elementul neutru $e \in \mathbb{N}$ astfel încât oricare ar fi $\forall x \in \mathbb{N} \quad e * x = x$.

Dacă aleg $x > e$ înseamnă că restul împărțirii lui e la x este x ceea ce este absurd, restul împărțirii fiind mai mic strict decât împărțitorul.

Deci legea de compoziție " $*$ ", considerată pe mulțimea \mathbb{N} , nu admite element neutru.