Soluție

1.a) $d=\dfrac{bc}{a}\Rightarrow f(x)=\dfrac{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}=\dfrac{a}{c}$

1.b) Fie $x_1,x_2>0$ a.î. $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1(ad-bc)=x_2(ad-bc)$, deci $x_1=x_2$, adică f este injectivă.

1.c) Inducție după n. Pentru $n=1\Rightarrow f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{a_1x+b_1}{c_1x+d_1}$. Presupunem adevărată pentru n şi

demonstrăm pentru $n+1$. $\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n+1}(x)=\dfrac{a_nf(x)+b_n}{c_nf(x)+d_n}=$

$\dfrac{a_{n+1}x+b_{n+1}}{c_{n+1}x+d_{n+1}}$, deoarece $A^{n+1}=A^n\cdot A=\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix}\cdot A$.

2a) Fie $X\in G, X=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&b\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+1&b\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det X=a+1\neq 0$.

2.b) $A^2=A, B^2=0_2, A\cdot B=B, B\cdot A=0_2$.

Fie $X_1,X_2\in G; X_1=I_2+aA+bB, X_2=I_2+a'A+b'B$

$X_1\cdot X_2=I_2+\left(a+a'+aa'\right)A+\left(b+b'+bb'\right)B$, $a+a'+aa'\neq -1$.

$(X_1)^{-1}=I_2-\dfrac{a}{a+1}A-\dfrac{b}{b+1}B$, deci G este un grup.

2.c) $X^2=I_2\Rightarrow X=I_2-2A+bB, b\in\mathbb{R}$.