**Rezolvare.**

**a)** $A+I_3=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A+I_3)=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&0&1\end{vmatrix}=2$ număr par

$\Rightarrow A+I_3\in M$ .

**b)** $(A+I_3)^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&3\\0&4&3\\0&0&1\end{pmatrix}$, $3A+I_3=\begin{pmatrix}0&3&3\\0&3&3\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&3\\0&4&3\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$

$(A+I_3)^2=3A+I_3$ .

**c)** $A^2=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}=A\Rightarrow A+A^2+A^3+...+A^{12}=12A=\begin{pmatrix}0&12&12\\0&12&12\\0&0&0\end{pmatrix}$.

**d)** $A+xI_3=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x&0&0\\0&x&0\\0&0&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&1&1\\0&x+1&1\\0&0&x\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A+xI_3)=\begin{vmatrix}x&1&1\\0&x+1&1\\0&0&x\end{vmatrix}=x^2(x+1)\Rightarrow$

$x^2(x+1)=0$, $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{-1,\ 0\}$ .

**e)** Fie $X=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\p&q&r\end{pmatrix}$ cu $\det X$ număr par $\Rightarrow AX=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\p&q&r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d+p&e+q&f+r\\d+p&e+q&f+r\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det(AX)=\begin{vmatrix}d+p&e+q&f+r\\d+p&e+q&f+r\\0&0&0\end{vmatrix}=0$ număr par $\Rightarrow AX\in M$ .

**f)**

$$\det B=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}\overset{\substack{C_2-C_1\\C_3-C_1}}{=}\begin{vmatrix}1&0&0\\a&b-a&c-a\\a^2&(b-a)(a+b)&(c-a)(a+c)\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b).$$

Dintre numerele $a,b,c\in\mathbb{Z}$ cel puțin două au aceeași paritate, deci diferența lor este un număr par $\Rightarrow B\in M$