

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție:

a) O primitivă este de forma $F(x) = x^2 - \frac{x^3}{3} + k$. Deoarece $F(1) = 1 - \frac{1}{3} + k \in \mathbb{Z}$, e suficient să alegem

$$k = \frac{1}{3} \text{ (sau } k = \frac{7}{3}, \text{ etc.)}. \text{ și avem, de exemplu, } F(x) = x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}$$

$$\text{b) } \int_{-1}^1 f(x) dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1, \text{ deci } \int_{-1}^1 f(x) dx = -\frac{2}{3}$$

$$\text{c) } \int_3^4 \frac{x-2}{f(x)} dx = -\int_3^4 \frac{1}{x} dx, \int_3^4 \frac{x-2}{f(x)} dx = -\ln 4 + \ln 3 = \ln \frac{3}{4}. \text{ Așadar există } q = \frac{3}{4} \in (0,1)$$

$$\text{d) } \int_3^n \frac{f(x)}{2-x} dx = \frac{x^2}{2} \Big|_3^n \text{ și } \frac{n^2-9}{2} = 20 \Rightarrow n = 7$$

$$\text{e) } 0 < \mathcal{A}(S) = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \frac{4}{3}; \text{ există } 1 \in \mathbb{Z}, 1 \in \left(0, \frac{4}{3}\right), \text{ iar graficul este o parabolă cu vârful } V(1,1) \text{ și}$$

intersecțiile cu Ox sunt $A(0,0), B(2,0)$. Triunghiul VAB are aria egală cu 1 și este înscris în suprafața S

f) Pentru orice $x \in [0,1]$ avem $1 \leq e^x \leq e$, $0 \leq f(x) \leq 1 \Rightarrow e^x \cdot f(x) \leq e$. Integrând inegalitatea obținută

anterior ajungem la $\int_0^1 e^x \cdot f(x) dx \leq e$