Soluție

1.a) $f'(x) = \ln x + 1$

b) $f''(x) = \dfrac{1}{x}$; $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} = 0 \Rightarrow$ nu există soluții reale.

Tabelul de semne pentru funcția $f'' \Rightarrow$ $f(x)$ convexă pe intervalul $(0, \infty)$.

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = 0\cdot(-\infty) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$.

2.a) F primitivă $\Rightarrow$ $F'(x) = f_m(x) = m^2x^2 + mx + 1$;

$m^2x^2 + mx + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = -3m^2 < 0 \Rightarrow$ $f_m(x) > 0$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$ $F'(x) > 0 \Rightarrow$ F crescătoare.

b) Pentru $m = 1 \Rightarrow \int_0^1 xe^x\,dx = xe^x \Big|_0^1 - e^x \Big|_0^1 = 1$.

c) Din punctul **a)**$\Rightarrow$ Aria$(\Gamma_f) = \int_0^1 f(x)\,dx = \dfrac{m^2}{3} + \dfrac{m}{2} + 1$;

aria este minimă dacă $\dfrac{m^2}{3} + \dfrac{m}{2} + 1$ are valoare minimă $\Rightarrow$ $m = \dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = -\dfrac{3}{4}$.