Rezolvare

a) Se demonstrează că $\forall x, y \in M \;\; x+y \in M$

Fie $x = a - b\sqrt{3}$ şi $y = c - d\sqrt{3} \in M$, $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$.

$x + y = (a+c) - (b+d)\sqrt{3}$ şi deoarece $a + c \in \mathbb{Z}$ şi $b + d \in \mathbb{Z}$ se obține că $x + y \in M$

b) Fie $x = a - b\sqrt{3}$ şi $y = c - d\sqrt{3} \in M$, $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$.

$x \cdot y = (ac + 3bd) - (ad + bc)\sqrt{3}$ şi deoarece $ac + 3bd \in \mathbb{Z}$ şi $ad + bc \in \mathbb{Z}$ se obține că $x \cdot y \in M$

c) $0 = 0 - 0 \cdot \sqrt{3} \in M$, $1 = 1 - 0 \cdot \sqrt{3} \in M$, deci $\{0,1\} \subset M$.

d) Deoarece 1 este element neutru al operației $"\cdot"$ definită pe $\mathbb{R}$ şi $1 \in M$ rezultă că 1 este element neutru al operației $"\cdot"$ definită pe M .

$5+\sqrt{3}$ ete inversabil în raport cu $"\cdot" \Leftrightarrow \exists m - p\sqrt{3} \in M$ astfel încât $\left(m - p\sqrt{3}\right) \cdot \left(5 + \sqrt{3}\right) = 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5p - m = 0 \\ 5m - 3p = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5p \\ 5 \cdot 5p - 3p = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{5}{22}, p = \frac{1}{22}$. Dar $\frac{5}{22}, \frac{1}{22} \notin \mathbb{Z}$ deci $\nexists m - p\sqrt{3} \in M$ astfel încât $\left(m - p\sqrt{3}\right)\left(5 + \sqrt{3}\right) = 1$ adică $5 + \sqrt{3}$ nu este element inversabil înraport cu $"\cdot"$.

e) Ştiind că adunarea şi înmulțirea pe $\mathbb{R}$ sunt asociative si comutative şi admit element neutru pe 0 respectiv 1 şi deoarece $\{0,1\} \subset M$, iar $M \subset \mathbb{R}$ obținem că adunarea si înmlțirea sunt asociative si comutative şi pe M , iar 0 şi respectiv 1 sunt elemente neutre ale acestei operații definite pe M .

Cum orice element $a - b\sqrt{3} \in M$ are un opus $-a + b\sqrt{3} \in M$ şi şi înmulțirea este distributivă față de adunare, obținem că $(M,+,\cdot)$ este inel comutativ

f) Fie $x = a - b\sqrt{3} \in H$, $a^2 - 3b^2 = 1$ $a,b \in \mathbb{Z}$. x este element inversabil al lui H în raport cu operația $"\cdot"$ $\Leftrightarrow \exists x' = a' - b'\sqrt{3} \in H$ astfel încât $x \cdot x' = x' \cdot x = 1$. Din egalitatea $x \cdot x' = 1$ se obține $x' = a + b\sqrt{3} \in H$ $\forall x = a - b\sqrt{3} \in H$ adică orice element al mulțimii H este inversabil în raport cu operația de $"\cdot"$