Soluție

1. a) Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\left(x^2-x+1\right)'}{\left(x^2+x+1\right)'} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{2x+1} \overset{\frac{-\infty}{-\infty}}{\underset{L'H}{=}}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(2x-1)'}{(2x+1)'} = 1 \Rightarrow$ că dreapta $d: y=1$ este asimptotă orizontală la G_f spre $-\infty$.

b) Avem $f'(x) = \left(\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right)' = \frac{(2x-1)\left(x^2+x+1\right)-(2x+1)\left(x^2-x+1\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2} = \frac{2\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

c) $f'(x) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$. Din tabelul de variație rezultă că $A(-1,3)$ este punct de maxim, iar $B\left(1,\frac{1}{3}\right)$ este punct de minim al funcției f, adică are loc $\frac{1}{3} \le f(x) \le 3$. Pentru $x \to x^2 \in [0,+\infty)$ obținem $\frac{1}{3} \le f\left(x^2\right) \le 1$, căci $f(0) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$, iar apoi, prin adunarea ultimelor două duble inegalități, obținem concluzia.

2. a) Avem $\int_1^e f(x)dx = \int_1^e \left(x-\frac{1}{x}\right)dx = \int_1^e x\,dx - \int_1^e \frac{1}{x}dx = \left.\left(\frac{x^2}{2} - \ln|x|\right)\right|_1^e = \frac{e^2-3}{2}$.

b) O primitivă F a funcției f este convexă pe $(0,+\infty)$ $\Leftrightarrow F''(x) = f'(x) \ge 0, \forall x > 0$. Avem însă

$F''(x) = f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} \overset{\text{evident}}{\ge} 0, \forall x > 0$.

c) $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - x = -g(x) \Rightarrow V(C_h) = \pi\int_1^e h^2(x)dx = \pi\int_1^e (-g(x))^2 dx = \pi\int_1^e g^2(x)dx = V(C_g)$.