Soluții

1.a) Se demonstreaza prin inductie matematica.

b) $a_{n+1} - a_n = -a_n \cdot \sqrt{a_n} < 0 \Rightarrow$ sirul dat este strict descrescator.

c) Cum $a_k^2 < a_k \cdot \sqrt{a_k}, \forall k \in \mathbb{N}^*$, însumând se deduce relația cerută.

2.a) F este derivabila pe $\mathbb{R}$.

$F'(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = f(x)$.

b)Aria ceuta este $A = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = \ln\left(x^2+x+1\right)\Big|_0^1 = \ln 4.$

c)Limita ceruta este $L = \lim\limits_{n\to\infty} \left(F(n) - F(-n)\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}.$