Rezolvare

a) Se alege $x = a + b\sqrt{15}$ $a, b \in \mathbb{Z}$, $y = m + n\sqrt{15}$ $m, n \in \mathbb{Z}$.

$x \cdot y = (am + 15mn) + (an + bm)\sqrt{15}$ unde $am + 15mn, an + bm \in \mathbb{Z}$. Deci $x \cdot y \in M$

b) Se alege $x = a + b\sqrt{15}$ $a, b \in \mathbb{Z}$, $y = m + n\sqrt{15}$ $m, n \in \mathbb{Z}$.

$x + y = (a + m) + (b + n)\sqrt{15}$ unde $a + m, b + n \in \mathbb{Z}$. Deci $x + y \in M$.

c) $0 = 0 + 0\sqrt{15} \in M$,$1 = 1 + 0\sqrt{15} \in M$. Deci $\{0,1\} \subset M$

d) Operația „+” este comutativă pe $\mathbb{R}$ și admite element neutru pe 0. Deoarece M este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu „+” se obține că „+” ete comutativă și asociativă pe M și cum $0 \in M$, 0 este element neutru al operației „+” pe mulțimea M . Orice element $x = a + b\sqrt{15}$ are ca opus pe $-a - b\sqrt{15}$. (1)

Operația „$\cdot$” este comutativă și asociativă pe $\mathbb{R}$ și admite element neutru pe 1. Deoarece M este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu „$\cdot$” se obține că „$\cdot$” este comutativă și asociativă pe M și cum $1 \in M$, 1 este elemntul neutru al operației „$\cdot$” pe mulțimea M .(2)

Înmulțirea numerelor rele este distributivă față de adunare, deci și pe M înmulțirea numerelor este distributivă față de adunare. (3)

Din (1), (2),(3) se obține că $(M, +, \cdot)$ este inel comutativ.

e) Dacă $x = 4 - \sqrt{15}$ atunci simetricul elementului x în raport cu operația „$\cdot$” este $\frac{1}{x} = \frac{1}{4 - \sqrt{15}} = \frac{4 + \sqrt{15}}{(4 - \sqrt{15})(4 + \sqrt{15})} = \frac{4 + \sqrt{15}}{16 - 15} = 4 + \sqrt{15} \in M$

f) Deoarece din punctul precedent $(4 - \sqrt{15})(4 + \sqrt{15}) = 1$ alegem $x = 4 - \sqrt{15}$ și $y = -4 - \sqrt{15}$ $x, y \in M \setminus \mathbb{Q}$ astfel încât $x \cdot y = -1 \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$