Rezolvare

a) Fie $x=a+b\sqrt{2}, y=c+d\sqrt{2}\in M, a,b,c,d\in\mathbb{Z}$

$x+y=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}$ şi deoarece $a+c\in\mathbb{Z}$ şi $b+d\in\mathbb{Z}$ se obține că $x+y\in M$.

b) Se demonstrează că $\forall x,y\in M \quad x\cdot y\in M$

Fie $x=a+b\sqrt{2}$ şi $y=c+d\sqrt{2}\in M$, $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$

$x\cdot y=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}$ şi deoarece $ac+2bd\in\mathbb{Z}$ şi $ad+bc\in\mathbb{Z}$ se obține că $x\cdot y\in M$

c) $0=0+0\cdot\sqrt{2}\in M$ şi $1=1+0\cdot\sqrt{2}\in M$ deci $\{0,1\}\subset M$.

d) Deoarece 1 este element neutru al operatiei $"\cdot"$ definită pe $\mathbb{R}$ şi $1\in M$ rezultă 1 este element neutru al operației $"\cdot"$ definită pe *M.*

$5-\sqrt{2}$ este inversabil in raport cu $"\cdot"\Leftrightarrow\exists m+p\sqrt{2}\in M$ astfel încât $\left(m+p\sqrt{2}\right)\left(5-\sqrt{2}\right)=1$

$\Leftrightarrow\begin{cases}5p-m=0\\5m-2p=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=5p\\5\cdot5p-2p=1\end{cases}\Leftrightarrow p=\frac{1}{23}, m=\frac{5}{23}$. Dar $\frac{5}{23},\frac{1}{23}\notin\mathbb{Z}$ deci $\nexists m+p\sqrt{2}\in M$ astfel încât $\left(m+p\sqrt{2}\right)\left(5-\sqrt{2}\right)=1$ adică $5-\sqrt{2}$ nu este element inversabil în raport cu operația $"\cdot"$

e) Ştiind că adunarea pe $\mathbb{R}$ este asociativă si comutativă şi admite element neutru pe 0 şi deoarece $\{0\}\subset M$, iar $M\subset\mathbb{R}$ obținem că adunarea este asociativă si comutativă şi pe M , iar 0 este element neutru al acestei operații definite pe M . Deci $(M,+)$ este grup comutativ.

f) Fie $x=a+b\sqrt{2}\in H$, $a^2-2b^2=1$, $a,b\in\mathbb{Z}$. Elementul x este element inversabil al lui H în raport cu operația $"\cdot"\Leftrightarrow\exists x'=a'+b'\sqrt{2}\in H$ astfel încât $x\cdot x'=x'\cdot x=1$ Din egalitatea $x\cdot x'=1$ se obține $x'=a-b\sqrt{2}\in H$, $\forall x=a+b\sqrt{2}\in H$ şi analog din egalitatea $x'\cdot x=1$, adică orice element al mulțimii *H* este inversabil în raport cu operația $"\cdot"$.