

**Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**Rezolvare.**

a)  $X = I_2 - 2A \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$

b)  $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

c)  $m = -2 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \det(B) = 3 + 1 = 4 \neq 0 \Rightarrow B \text{ este inversabilă.}$

d)  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m+1 & 1 \\ -1 & m-1 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m+1 & 1 \\ -1 & m-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & m \\ -m & -m \end{pmatrix},$

$BA = \begin{pmatrix} m+1 & 1 \\ -1 & m-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & m \\ -m & -m \end{pmatrix} \Rightarrow AB = BA. \text{ Sau,}$

$AB = A(A + mI_2) = A^2 + mA = O_2 + mA = mA = BA.$

e)  $\det(B) = (m+1)(m-1) + 1 = m^2 \Rightarrow m^2 \geq 1 \Rightarrow m \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$

f)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3 & b+2 \\ c+1 & d-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+c=0 \\ b+d=-a-3+2b+4 \\ -a-c=0 \\ -b-d=-c-1+2d-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+c=0 \\ a-b+d=1 \\ 3d+b-c=5 \end{cases} . \text{ Numerele } a, b, c, d$$

sunt în progresie aritmetică de rație  $r \Rightarrow b = a + r, c = a + 2r, d = a + 3r \Rightarrow b = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} a+d=1 \\ 3d-c=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+3r=1 \\ 2a+7r=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=1 \\ a=-1 \end{cases} \Rightarrow a = -1, b = 0, c = 1, d = 2.$$