

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

a) Prin calcul direct rezultă $f(x) - \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{x+2} = 0, \forall x \in \mathbb{R} - \left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$

b) $f'(x) = \frac{-2}{(2x-1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{2x^2 - 12x - 7}{(2x-1)^2(x+2)^2}, x \in \mathbb{R} - \{1, -2\}$

c) $y - f(1) = f'(1)(x-1)$

$$y - \frac{2}{3} = -\frac{17}{9}(x-1) \Rightarrow 9y + 17x - 23 = 0$$

d) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ asimptotă orizontală spre $\pm\infty$

\Rightarrow graficul funcției nu are asimptotă oblică

$$l_s(-2) = \lim_{x \nearrow -2} f(x) = \infty$$

$$l_d(-2) = \lim_{x \searrow -2} f(x) = -\infty \Rightarrow x = -2 \text{ asimptotă verticală}$$

$$l_s\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x \nearrow \frac{1}{2}} f(x) = -\infty$$

$$l_d\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x \searrow \frac{1}{2}} f(x) = \infty \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ asimptotă verticală}$$

e) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x-1}+3}{2} = 3$

f) g continuă în $x=1 \Rightarrow l_s(1) = l_d(1) = g(1) \Rightarrow 4+a=b+1 \Rightarrow a=b-3$

$$g \text{ derivabilă în } x=1 \Rightarrow g'_s(1) = g'_d(1) \Rightarrow \lim_{x \nearrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x-1} = \lim_{x \searrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x-1}$$

$$\lim_{x \nearrow 1} \frac{x^2 + 3x + a - 4 - a}{x-1} = \lim_{x \searrow 1} \frac{bx + 1 - 4 - a}{x-1}$$

$$\lim_{x \nearrow 1} \frac{(x-1)(x+4)}{x-1} = \lim_{x \searrow 1} \frac{bx - 3 - b + 3}{x-1}$$

$$\Rightarrow b = 5$$

$$\Rightarrow a = 2$$