Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) f este continua pe D,deci in aceste puncte nu avem asimptote verticale
$f_d(-2)=-\infty,\ f_s(2)=\infty \Rightarrow x=-2, x=2$ sunt asimptote verticale.

b) $f''(x)=\dfrac{8x}{\left(4-x^2\right)^2}$,deci $x=0$ punct de inflexiune.

c) Limita ceruta este $L=\lim\limits_{x\to\infty} x^a\cdot\ln\left(\dfrac{2+\frac{1}{x}}{2-\frac{1}{x}}\right)=\lim\limits_{y\searrow 0}\dfrac{1}{y^a}\cdot\ln\dfrac{2+y}{2-y}$

$$L=\lim_{y\searrow 0}\frac{1}{y^a}\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{2y}{2-y}\right)}{\frac{2y}{2-y}}\cdot\frac{2y}{2-y}=\lim_{y\searrow 0}\frac{1}{y^{a-1}}=\begin{cases}0, a<1\\ 1, a=1\\ \infty, a>1\end{cases}.$$

2.a) $I=\int_0^1\left(-x+2-\dfrac{x}{x^2+4}\right)dx$; $I=\left(-\dfrac{x^2}{2}+2x-\dfrac{1}{2}\cdot\ln\left(x^2+4\right)\right)\Big|_0^1$ si finalizare.

b) Avem ca $I=\displaystyle\int_1^4\frac{x^2}{\left(x^2+4\right)^2}dx=\frac{-1}{2}\cdot\int_1^4\left(\frac{1}{x^2+4}\right)'\cdot xdx$

$$I=\frac{1}{2}\cdot\frac{-x}{x^2+4}\Bigg|_1^4+\frac{1}{4}\cdot arctg\frac{x}{2}\Bigg|_1^4=\frac{1}{4}\left(arctg2-arctg\frac{1}{2}\right).$$

c) Cu substitutia $f^{-1}(x)=t\Rightarrow f(t)=x, dx=f'(t)dt$

$I=\int_{\frac{4}{5}}^{2}f^{-1}(x)dx=-\int_0^1 t\cdot f'(t)dt=-t\cdot f(t)\Big|_0^1+\int_0^1 f(t)dt$,foloseste a) si se gaseste I .