SOLUȚIE:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1, & x^2+x\geq 0; \\ -x^2-x+1, & x^2+x<0, \end{cases} \Leftrightarrow f(x)=\begin{cases} x^2+x+1, & x\in(-\infty,-1]\cup[0,\infty); \\ -x^2-x+1, & x\in(-1,0). \end{cases}$

b) $f(x)=7 \Rightarrow x=-3 \vee x=2$ Abscisa punctului de tangență este un număr pozitiv $\Rightarrow x=2$ și punctul de tangență are coordonatele $(2,7)$ iar $f'(2)=5$. Atunci, $t: y-7=5(x-2)$, adică $t: y=5x-3$ este ecuația tangentei.

c) Intersecția este dată de soluția sistemului $\begin{cases} y=5x-3 \\ y=x \end{cases} \Rightarrow x=\frac{3}{4} \Rightarrow P\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)$

$PO=\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}.$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=1$, $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ și spre $-\infty$

e) $g'(x)=\frac{(2x+1)(x^2-x+1)-(2x-1)(x^2+x+1)}{(x^2-x+1)^2} \Rightarrow g'(x)=\frac{-2(x^2-1)}{(x^2-x+1)^2}$

f)

x	$-\infty$	-1	1		$+\infty$
$g'(x)$	$- - - - - - - - - - - -$	0	$+ + + + +$ 0	$- - - - - - - - - - - - -$	
$g(x)$	$1 \searrow \searrow \searrow$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow \nearrow$ 3	$\searrow \searrow \searrow \searrow$	1

Din analiza tabloului de variație $\Rightarrow g(x)\in\left[\frac{1}{3},3\right] \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\leq g(x)\leq 3, \forall x\in\mathbb{R}$