Soluție

1. a) Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ și $f'(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Deoarece $\lim\limits_{x\nearrow 0} f'(x)=\lim\limits_{x\nearrow 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=-\infty$, dintr-o consecință a teoremei lui Lagrange, rezultă $f_s'(0)=-\infty$.

Analog, $f_d'(0)=\infty$. Deci f nu este derivabilă în 0.

b) Deoarece funcția f este continuă pe intervalul $[k,k+1]$ și derivabilă pe intervalul $(k,k+1)$, aplicăm teorema lui Lagrange . Rezultă existența unui punct $c\in(k,k+1)$ astfel încât $f(k+1)-f(k)=f'(c)=\frac{1}{\sqrt[3]{c}}$.

c) Din $b_{n+1}-b_n=a_{n+1}-f(n+1)-(a_n-f(n))=a_{n+1}-a_n-(f(n+1)-f(n))$ rezultă

$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}-\frac{1}{\sqrt[3]{c_n}}$ cu $c_n\in(n,n+1)$. Dar din $c_n\in(n,n+1)$ rezultă $\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}<\frac{1}{\sqrt[3]{c_n}}<\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Prin urmare $b_{n+1}-b_n<0$, așa încât șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător.

2.a) $\int_0^1 \ln(1+x)\,dx=\int_0^1 x'\ln(1+x)\,dx = x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{x+1}dx$, apoi

$x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{x+1}dx=\ln 2-\int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=\ln\frac{4}{e}$.

Rezultă $\int_0^1 f(x)\,dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}\right)\Big|_0^1-\ln\frac{4}{e}=\frac{5}{12}-\ln\frac{4}{e}$.

b) Cum $F(0)=0$, aplicăm regula lui l´Hôspital: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{F'(x)}{5x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{5x^4}$. Dar

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{5x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1-x+x^2-\frac{1}{1+x}}{20x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{20x^3(1+x)}=\frac{1}{20}.$$

c) $f'(x)=1-x+x^2-\frac{1}{1+x}=\frac{x^3}{1+x}$. Cum, pe $(-1,0)$ derivata f' este negativă, iar pe $(0,\infty)$ este pozitivă, rezultă că 0 este punct de minim absolut, deci $f(x)\geq f(0)=0$.

Rezultă $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\geq\ln(1+x)$ .din care se obține $\int_0^1\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)dx\geq\int_0^1\ln(1+x)dx$

Dar $\int_0^1\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)dx=\frac{5}{12}$, deci $\int_0^1\ln(1+x)dx\leq\frac{5}{12}$.