Soluție

1. a) Prin inducție demonstrăm că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(x)=2^{n+1}e^{2x},\forall x\in\mathbb{R}$. Într-adevăr $f_1(x)=f_0'(x)=2e^{2x}$. Presupunem că $f_n(x)=2^n e^{2x}$ şi rezultă că $f_{n+1}(x)=2^{n+1}e^{2x}$. Pentru $n=3$ rezultă $f_3(x)=8e^{2x},\ \forall x\in\mathbb{R}$.

b) Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}2^n e^{2x}=0$ rezultă că axa Ox este asimptotă orizontală spre $+\infty$. Cum $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{x\to\infty}2^n e^{2x}=\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f_n(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^n e^{2x}}{x}=\infty$ rezultă că f_n nu are alte asimptote.

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_1(a)+f_2(a)+...+f_n(a)}{f_{n+1}(a)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2e^{2a}+2^2e^{2a}+...+2^ne^{2a}}{2^{n+1}e^{2a}}$, apoi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2e^{2a}+2^2e^{2a}+...+2^ne^{2a}}{2^{n+1}e^{2a}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+2^2+...+2^{n-1}}{2^n}$$ şi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+2^2+...+2^{n-1}}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1.$$

2. a) Funcția *f* este continuă pe intervalul $(0,\infty)$ deoarece pe acest intervale *f* se obține prin operații cu funcții continue. Continuitatea în 0:

$$\lim_{x\searrow0}f(x)=\lim_{x\searrow0}x^2\ln^2x=\left(\lim_{x\nearrow0}x\ln x\right)^2=\left(\lim_{x\nearrow0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right)^2=\left(\lim_{x\nearrow0}(-x)\right)^2=0=f(0).$$

Deci *f* este continuă şi în 0.

Rezultă f continuă pe $[0,\infty)$ şi prin urmare este integrabilă pe $[0,1]$

b) Se aplică succesiv integrarea prin părți

$$\int_t^1 f(x)dx=\int_t^1x^2\ln^2xdx=\frac{x^3}{3}\ln^2x\Big|_t^1-\frac{2}{3}\int_t^1x^2\ln xdx=-\frac{t^3}{3}\ln^2t-\frac{2}{9}x^3\ln x\Big|_t^1+\frac{2}{9}\int_t^1x^2dx=$$

$$=-\frac{t^3}{3}\ln^2t+\frac{2}{9}t^3\ln t+\frac{2}{27}x^3\Big|_t^1=-\frac{t^3}{3}\ln^2t+\frac{2}{9}t^3\ln t-\frac{2}{27}t^3+\frac{2}{27}=$$

$$=-\frac{t^2}{3}(t\ln t)^2+\frac{2t^2}{9}(t\ln t)-\frac{2}{27}t^3+\frac{2}{27}.$$

Deoarece $\lim\limits_{x\searrow0}t\ln t=0$ rezultă $\lim\limits_{t\searrow0}\int_t^1 f(x)dx=\dfrac{2}{27}$, deci $\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{2}{27}$

c) Deoarece $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}\ln^2\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x}\ln^2x,\forall x\ge1$ rezultă $\int_1^e f\left(\dfrac{1}{x}\right)dx=\int_1^e(\ln x)'\ln^2xdx=\ln^3x\Big|_1^e-2\int_1^e\dfrac{1}{x}\ln^2xdx$.

Prin urmare $\int_1^e f\left(\dfrac{1}{x}\right)dx=1-2\int_1^e f\left(\dfrac{1}{x}\right)dx$, de unde $\int_1^e f\left(\dfrac{1}{x}\right)dx=\dfrac{1}{3}$.