Rezolvare

1.Coordonatele punctului de intersecție ale graficelor funcțiilor se obșin rezolvțnd sistemul

$$\begin{cases} y = 2x+3 \\ y = 6-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x+3 \\ 2x+3 = 6-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = 1 \end{cases}$$

Deci punctul de intersecție are într-adevăr abscisa 1.

2.a. $f(x) \le 3, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x-1)^2 \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}.$ ceea ce este adevărat având în vedere proprietatea pătratului unui număr real.

2.b. $x_1^3 + x_2^3 = (x_1+x_2)\left(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2\right) = (x_1+x_2)\left((x_1+x_2)^2 - 3x_1x_2\right)$**.**

Din relațiile lui Viete avem $x_1 + x_2 = 2$ și $x_1x_2 = -2$.

Atunci $x_1^3 + x_2^3 = 2\cdot(4+3\cdot 2) = 20$.

3.Graficul funcției f intersectează axa Ox în două puncte distincte ,dacă $\Delta > 0.$

$\Delta = 4 + 4m^2 > 0,$ adevărat pentru orice $m \in \mathbb{R}^*$

4.a. $\sqrt{x^2+9} = x+9 \Rightarrow x^2 + 9 = (x+9)^2 \Leftrightarrow x^2 + 9 = x^2 + 18x + 81 \Leftrightarrow 18x = -72 \Leftrightarrow x = -4.$

Cum $-4 \in \mathbb{Z}$ și verifică ecuația dată $\Rightarrow \mathbb{S} = \{-4\}.$

4.b. Transformăm ecuația : $3^{2x}\cdot 3 + 26\cdot 3^x \cdot \frac{1}{3} - 1 = 0.$

Notăm $3^x = t, t > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ atunci obținem $9t^2 + 26t - 3 = 0 \Leftrightarrow t_1 = -3 < 0$ și $t_2 = \frac{1}{9} > 0.$

Înlocuind $3^x = \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^x = 3^{-2} \Leftrightarrow x = -2 \in \mathbb{R}.$ Deci $\mathbb{S} = \{-2\}.$