

Rezolvare

1. Știind că $f(-9) = -9$ și $f(9) = 9$ avem $\begin{cases} -9a + b = -9 \\ 9a + b = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a = 9 \\ 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1; 1 \in \mathbb{R} \\ b = 0; 0 \in \mathbb{R} \end{cases}.$

2.a. Se știe că axa de simetrie al graficului funcției de gradul doi este dreapta de ecuație $x = \frac{-b}{2a} = 2$. Aceasta înseamnă că $f\left(2 - \frac{1}{2}\right) = f\left(2 + \frac{1}{2}\right)$, $f\left(2 - \frac{7}{6}\right) = f\left(2 + \frac{7}{6}\right)$, ceea ce înseamnă că egalitatea este evidentă.

Observație. Se pot efectua calculele cu valorile respective ale funcției.

2.b. $\begin{cases} xy = 7 \\ x + y = -8 \end{cases}$

Avem de rezolvat ecuația de gradul doi $t^2 + 8t + 7 = 0$.

Soluțiile sunt : $t_1 = -1, t_2 = -7$

Sistemul fiind simetric, mulțimea soluțiilor este $\{(-1, -7), (-7, -1)\}$

3. Coordonatele punctului de minim sunt $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - m + 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}, y = \frac{3}{4} - m$.

Punctul de minim va fi situat în cadranul III al sistemului de coordonate dacă $x < 0$ și $y < 0$.

Deci $-\frac{1}{2} < 0$ și $\frac{3}{4} - m < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4} < m$.

4.a. Condițiile de existență sunt: $2x^2 + 3x - 2 \geq 0, 4 - 4x - x^2 \geq 0$.

$$\sqrt{2x^2 + 3x - 2} = \sqrt{4 - 4x - x^2} \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 2 = 4 - 4x - x^2 \Leftrightarrow 3x^2 + 7x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -3, x_2 = \frac{2}{3}.$$

Înlocuind în ecuație $x = \frac{2}{3}$ satisface egalitatea, iar $x = -3$ nu poate fi acceptat pentru că $-3 \notin \mathbb{R}_+$.

4.b. Condițiile de existență sunt: $0 < 17 - 2^x$ și $0 < 2^x + 15$.

$$\log_2(17 - 2^x) + \log_2(2^x + 15) = 8 \Leftrightarrow (17 - 2^x)(2^x + 15) = 256$$

$$\Leftrightarrow 17 \cdot 2^x - 2^{2x} - 15 \cdot 2^x + 255 = 256 \Leftrightarrow 2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2^x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

$x = 0$ este soluția ecuației deoarece satisface atât condițiile de existență impuse cât și egalitatea dată.