Rezolvare

1. $A\left(-\frac{1}{2};1\right)\in G_f \Leftrightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right)=1\Leftrightarrow(-2m+1)\left(-\frac{1}{2}\right)+2m=1\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}.$

2.a. Abscisa punctului de minim al funcției $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{1}{5}\Rightarrow$ funcția este strict crescătoare pe intervalul $\left(-\frac{1}{5};\infty\right)$, și este strict descrescătoare pe intervalul $\left(-\infty;-\frac{1}{5}\right)$.

2.b. $\Delta=m^2-2m+29=(m-1)^2+28>0,\forall m\in\mathbb{R}\Rightarrow x_1,x_2\in\mathbb{R}.$

$\frac{x_1-1}{x_1}+\frac{x_2-1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}+6\Leftrightarrow x_1+x_2+2x_1x_2=0.$

Aplicând relațiile lui Viete $x_1+x_2=m-3$ și $x_1x_2=-m-5$ ecuația devine $-m-13=0\Leftrightarrow m=-13;-13\in\mathbb{R}$

3. $f(x)\le 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<0\\ m^2+4m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow m\in(-\infty;-4]\cup[0;\infty).$

4.a. Aplicând proprietățile puterii avem

$2^x+2^x\cdot 4+2^x\cdot 8=3^x+3^x\cdot 3+3^x\cdot 9\Leftrightarrow 2^x\cdot 13=3^x\cdot 13\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^x=1\Leftrightarrow x=0;0\in\mathbb{R}\Rightarrow\mathbb{S}=\{0\}.$

4.b. Condiția de existență este $x^2+3x>0.$

Aplicând proprietățile logaritmilor avem: $x^2+3x=4\Leftrightarrow(x-1)(x+4)=0\Leftrightarrow x_1=1;x_2=-4.$

Ambele valori verifică condiția de existență precum și ecuația $\Rightarrow\mathbb{S}=\{-4;1\}.$