

Rezolvare:

a.  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}$ , de unde  $\det A = b + a - 2 - 3ab = a + b - 3ab - 2$ ;

b. Pentru  $b = 5$  matricea devine  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ , de unde  $\det A = -15a + a + 5 - 2 = -14a + 3$ . Se va

obține ecuația cu necunoscuta  $a$ :  $-14a + 3 = 17 \Leftrightarrow a = -1$ ;

c. Pentru  $a = 2$  matricea devine  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}$ , de unde  $\det A = -5b + 2 - 2 = -5b$ . Matricea este

inversabilă dacă și numai dacă  $\det A \neq 0$ , de unde  $-5b \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 0$ . În concluzie matricea  $A$  este inversabilă pentru  $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

d. Pentru  $a = 2$  și  $b = 1$  matricea devine  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\det A = -5$ . Calculăm matricea adjunctă

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \text{ atunci } A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

e. Ecuația de gradul al doilea  $x^2 - x + 5 = 0$  ale cărei soluții sunt  $x_1$  și  $x_2$  verifică relațiile lui Viete între coeficienții ecuației și soluțiile acesteia, de unde vom obține  $x_1 + x_2 = 1$  și  $x_1 x_2 = 5$ . Dacă  $a = x_1$  și

$b = x_2$ , matricea devine  $A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x_2 \end{pmatrix}$  cu  $\det A = -3x_1 x_2 + x_1 + x_2 - 2$ . Prin înlocuire se va obține

$$\det A = -16.$$

f. 
$$\begin{cases} x + y + 2z = 8 \\ 3x + y + z = 10 \\ x = 2 \end{cases}, \text{ înlocuind } x = 2 \text{ în primele două ecuații ale sistemului se va obține } \begin{cases} y + 2z = 6 \\ y + z = 4 \\ x = 2 \end{cases}, \text{ de}$$

unde se va obține printr-un simplu calcul  $\begin{cases} z = 2 \\ y = 2 \\ x = 2 \end{cases}$ . În acest caz, mulțimea soluțiilor sistemului va fi:

$$\{(2; 2; 2)\}$$