Soluție

1.a) $A\cdot(X+Y)\cdot A^t = A\cdot X\cdot A^t + A\cdot Y\cdot A^t = 0_2 \Rightarrow X+Y\in G$

b) Fie $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in G$; atunci $A\cdot X\cdot A^t = (a+b+c+d)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$A\cdot X\cdot A^t = 0_2 \Rightarrow a+b+c+d=0$

c) $\det X = 0 \Rightarrow X^2 = tX$, unde $t=\mathrm{Tr}(A)$. Prin inducție rezultă $X^n = t^{n-1}X$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$

Atunci $A\cdot X^n\cdot A^t = t^{n-1}\left(A\cdot X\cdot A^t\right) = 0_2 \Rightarrow X^n\in G$.

2. a) Prin împărțire se obține câtul X^2-4X+5 și restul 0.

b) $f=\left(X^2-2X+5\right)\left(X^2-4X+5\right)$. Rădăcinile polinomului sunt $x_{1,2}=1\pm 2\mathrm{i}$, $x_{3,4}=2\pm\mathrm{i}$, niciuna nefiind reală.

c) Prin calcul direct rezultă $|x_k|=\sqrt{5}$, $k=1,2,3,4$.