Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) $e^x - 1 < 0, \forall x \in (-\infty, 0) \Rightarrow f(x) < 0; F(x) \in \int f(x)dx \Leftrightarrow F'(x) = f(x) < 0 \Rightarrow$
primitivele F sunt strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0)$

b) $g(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \left(e^t - 1\right)dt = \left(e^t - t\right)\Big|_0^x = e^x - x - 1 \Rightarrow$

c) $g'(x) = \left(e^x - x - 1\right)' = e^x - 1 \Rightarrow$ funcția g este o primitivă a funcției f .

d) $\int_{-1}^{1} |x| \cdot f(x)dx = -\int_{-1}^{0} x \cdot f(x)dx + \int_0^1 x \cdot f(x)dx = -\int_{-1}^{0} x \cdot \left(e^x - 1\right)dx + \int_0^1 x \cdot \left(e^x - 1\right)dx$; integrand prin părți,
avem: $\int_{-1}^{1} |x| \cdot f(x)dx = 1 - \frac{2}{e}$

e) notăm $u:[1, x] \to \mathbb{R}, u(t) = f(\ln t) = e^{\ln t} - 1 = t - 1 \Rightarrow u'(t) = 1$ și
$v:[1, x] \to \mathbb{R}, v(t) = \ln\left[f(t) + 1\right] = \ln\left(e^t - 1 + 1\right) = \ln e^t = t \Rightarrow v'(t) = 1$
Cum $u(t) < v(t), \forall t \in [1, x] \Rightarrow f(\ln t) < \ln\left[f(t) + 1\right] \Rightarrow$ înlocuind în teorema de monotonie:
„$v(x) \geq u(x), \forall x \in [a; b] \Rightarrow \int_a^b v(x)dx \geq \int_a^b u(x)dx$” avem : $\int_1^x f(\ln t)dt \leq \int_1^x \ln\left[f(t) + 1\right]dt$

f) $\Gamma_f = \int_{-1}^{1} \left(e^x - 1\right)dx = \left(e^x - x\right)\Big|_{-1}^{1} = e - 2 - \frac{1}{e}$