Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) Avem $f'(x)=\left((x-1)e^x\right)'=(x-1)'e^x+(x-1)\left(e^x\right)'=e^x+(x-1)e^x=xe^x=g(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^x\right)\overset{(-\infty)\cdot 0}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\frac{1}{e^x}}\underset{L'H}{\overset{\frac{-\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x'}{\left(\frac{1}{e^x}\right)'}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{e^{-x}}\right)=0$; deci dreapta $d: y=0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la G_g.

c) Din punctul a) avem relația $f'(x)=g(x), \forall x\in\mathbb{R}$. Prin derivare obținem: $f''(x)=g'(x), \forall x\in\mathbb{R}$.Câtă vreme funcția g este crescătoare pe acele intervale unde prima ei derivată este pozitivă, iar funcția f este convexă pe acele intervale unde a doua ei derivată este pozitivă, egalitatea anterioară justifică concluzia.

2. a) $f'(x)=\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)'=\dfrac{(\ln x)'\cdot x-x'\cdot(\ln x)}{x^2}=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}=g(x)\Rightarrow$ f este primitivă a lui g.

b) $\int\limits_1^e f(x)\cdot g(x)dx \overset{f'(x)=g(x)}{=} \int\limits_0^1 f(x)\cdot f'(x)dx=\left.\dfrac{f^2(x)}{2}\right|_1^e=\dfrac{f^2(e)}{2}-\dfrac{f^2(1)}{2}=\dfrac{1}{2e^2}$.

c) Avem succesiv $\int\limits_1^a \dfrac{\ln x}{x}dx=2\Rightarrow\int\limits_1^a \ln x\cdot(\ln x)'dx=2\Rightarrow\left.\dfrac{\ln^2 x}{2}\right|_1^a=2\Rightarrow\ln^2 a=4\Rightarrow$

$\Rightarrow \ln a=\pm 2 \Rightarrow \begin{array}{l}\nearrow \ \ln a=2\Rightarrow a_1=e^2\in[1,+\infty)\\ \searrow \ \ln a=-2\Rightarrow a_2=e^{-2}\notin[1,+\infty)\end{array}$. Deci $a=e^2$.