Soluții

1.a) $x=0$ este asimptota verticala.Functia f nu admite alte asimptote

b) Aplica T.Lagrange functiei f pe $[k,k+1]$ si stabileste inegalitatile cerute.

c) Sumeaza inegalitatile de la a) si obtine $x_n > \ln(n+1)-\ln n > 0, n\in\mathbb{N}^*$.

$x_{n+1}-x_n = \frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n$ si folosind a) se deduce ca sirul este descrescator.

2.a) Convine $F'(x)=f(x), \forall x>-1$,

adica $\frac{a}{x+1}+\frac{2bx}{x^2+1}+\frac{c}{x^2+1}=\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}, \forall x>-1$

sau $a+2b=0, 2b+c=2, a+c=0$, de unde $a=-1, b=\frac{1}{2}, c=1$.

b) Avem: $\int_0^1 f(x)dx = F(x)\Big|_0^1 = \left(-\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+arctg(x)\right)\Bigg|_0^1 = =$

$-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}$.

c) Avem ca $F'(x)=f(x), x>-1$ Stabileste ca $F'(x)<0, x\in(-1;0), F'(x)>0, x>0$ si deduce monotonia.