

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) F primitivă a funcției $f \Rightarrow F(x) = \int f(x)dx \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$;

$x \in (0, +\infty) \Rightarrow x+1 > 0, e^x > 0 \Rightarrow F'(x) = f(x) = e^x(x+1) > 0 \Rightarrow$ oricare primitivă F a funcției f este crescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$.

b) $\int \frac{f(x)}{e^x} dx = \int \frac{(x+1)e^x}{e^x} dx = \int (x+1) dx = \frac{x^2}{2} + x + \ell, \ell \in \mathbb{R}$

c) $\int_1^2 \frac{f(x)}{xe^x} dx = \int_1^2 \frac{(x+1)e^x}{xe^x} dx = \int_1^2 \frac{x+1}{x} dx = \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = \left(x + \ln|x|\right) \Big|_1^2 = 1 + \ln 2$

d) Notăm funcțiile $u: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, u(x) = \frac{1}{x}; v: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, v(x) = x+1 \Rightarrow$

$$u'(x) = -\frac{1}{x^2}; v'(x) = 1; x \in (1, +\infty) \Rightarrow -\frac{1}{x^2} < 1 \Rightarrow u'(x) < v'(x); u(1) = 1 < 2 = v(1) \Rightarrow u(x) \leq v(x) \Rightarrow \frac{1}{x} \leq x+1$$

e) Integrând prin părți obținem:

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x) dx &= \int_1^2 (x+1)e^x dx = \int_1^2 (x+1)(e^x)' dx = \left[(x+1)e^x \right]_1^2 - \int_1^2 (x+1)' e^x dx \Rightarrow \\ \int_1^2 f(x) dx &= 2e^2 - e \end{aligned}$$

f) Teorema de monotonie: $f(x) \geq g(x), \forall x \in [u; v] \Rightarrow \int_u^v f(x) dx \geq \int_u^v g(x) dx$;

din punctul **d)** avem $\frac{1}{x} \leq x+1 \Leftrightarrow \frac{e^x}{x} \leq e^x(x+1), e^x > 0 \Rightarrow \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx \leq \int_1^2 e^x(x+1) dx = \int_1^2 f(x) dx = 2e^2 - e$ (din

punctul **e)**); cum $2e^2 - e \leq 2e^2 \Rightarrow \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx \leq 2e^2$