Soluție

1. Avem $z=\frac{4a}{4+a^2}+\frac{4-a^2}{4+a^2}i$. Atunci $z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z)=0 \Leftrightarrow 4-a^2=0 \Leftrightarrow a=\pm 2$.

2. Rezolvăm sistemul $\begin{cases} 2x+3=y \\ x^2-4x+12=y \end{cases}$ și obținem o singură soluție: $\begin{cases} x=3 \\ y=9 \end{cases}$. Rezultă că dreapta de ecuație $y=2x+3$ este tangentă la parabola de ecuație $y=x^2-4x+12$ în punctul $P(3,\ 9)$.

3. Se impun condițiile $2x-1\geq 0$ și $x\geq 0$, adică $x\in\left[\frac{1}{2},\ \infty\right)$.

Prin ridicare la pătrat ecuația devine $2x-1=x^2 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$.

4. Produsul cartezian $A\times A$ are 36 de elemente: $A\times A=\{(1,\ 1),\ (1,\ 2),.....,(6,\ 6)\}$.

Cazurile favorabile sunt $(1,5)$, $(5,1)$, $(2,3)$, $(3,\ 2)$ și $(3,3)$. Probabilitatea cerută este $\frac{5}{36}$.

5. $\overrightarrow{MA}=-\vec{i}+3\vec{j}$, $\overrightarrow{MB}=2\vec{i}+2\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{i}+5\vec{j} \Rightarrow \left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=\sqrt{26}$.

6. Avem succesiv: $\sin(a+b)\cdot\sin(a-b)=(\sin a\cos b+\cos a\sin b)(\sin a\cos b-\cos a\sin b)=$

$=\sin^2 a\cos^2 b-\cos^2 a\sin^2 b=\sin^2 a\left(1-\sin^2 b\right)-\left(1-\sin^2 a\right)\sin^2 b=\sin^2 a-\sin^2 b$.