

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) Avem $\sqrt{x^2 + (x+1)^2} = x+2$, $x \geq -2$. Prin ridicare la pătrat se obține ecuația $x^2 - 2x - 3 = 0$, adică $x \in \{-1, 3\}$

b) Asociativitatea rezultă din $(x * y) * z = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x * (y * z)$.

c) Dacă legea ar avea element neutru, atunci $\exists e \in \mathbb{R}$, astfel încât $x * e = e * x = \sqrt{x^2 + e^2} = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Pentru $x \geq 0$ obținem $e = 0$, dar pentru $x < 0$, $x * e = x * 0 = -x \neq x$. Deci legea nu admite element neutru.

d) Inegalitatea din enunț este echivalentă cu inegalitatea $(x+y)^2 \leq 2(x*y)^2$, adică $(x+y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$, inegalitate care este echivalentă după efectuarea calculelor cu $0 \leq (x-y)^2$.

e) Cum $a = (1 * 1)^2 = 2$, $b = (1 * 1 * 1)^2 = 3$ și $c = (1 * 1 * 1 * 1)^2 = 4$, atunci evident se verifică cerința din enunț.

f) Cum $(1 + \sqrt{7}) * (1 - \sqrt{7}) = \sqrt{8 + 2\sqrt{7} + 8 - 2\sqrt{7}} = 4$, rezultă că afirmația din enunț este adevărată.