Soluție

1.a) $f'(x)=1+e^x\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$, deci f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.Rezultă căeste injectivă. Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ şi f este continuă rezultă $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}$. Prin urmare f este surjectivă.

Fiind injectivă şi surjectivă, f este bijectivă.

b) Fie funcția $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(x)=x+e^x-(2x+1)$. Deci $h(x)=e^x-x-1$.

Rezultă $h'(x)=e^x-1$şi următorul tabel de variație:

x	$-\infty$		0		∞
$f'(x)$		$-----$	0	$+++++++$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞

Din tabelul de variație rezultă $h(x)=x+e^x-(2x+1)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$, de unde $f(x)\ge 2x+1,\forall x\in\mathbb{R}$

Rezultă $f(l)=1+l$, de unde $l+e^l=1+l$ cu soluția unică $l=0$.

2.a) Deoarece F este o primitivă pe $\mathbb{R}$ a funcției f, atunci $F'(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}$.

Deci $(4F(x))'=4f(x)=4\sin^3 x\cos x$.

Apoi $\left(\sin^4 x\right)'=4\sin^3 x\cos x$. Deci există $c\in\mathbb{R}$ astfel încât $4F(x)=\sin^4 x+c$.

b) Aria subgraficului este $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$.

Dar $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt=\frac{1}{4}\sin^4 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$. Cum $\frac{1}{4}\sin^4 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}$

rezultă că aria cerută este $\frac{1}{4}$.

c) $\int_0^{\pi} f^{2n+1}(x)dx=\int_0^{\pi}\sin^{6n+3}x\cos^{3n+1}xdx$. Pentru calculul integralei $\int_0^{\pi}\sin^{6n+3}x\cos^{3n+1}xdx$ utilizăm schimbarea de variabilă $\cos x=t$. Rezultă $\int_0^{\pi} f^{2n+1}(x)dx=-\int_{-1}^{1} t^{3n+1}\left(1-t^2\right)^{3n+1}dt$.

Deoarece funcția $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(t)=t^{3n+1}\left(1-t^2\right)^{3n+1}$ rezultă $\int_{-1}^{1} t^{3n+1}\left(1-t^2\right)^{3n+1}dt=0$,

deci $\int_0^{\pi} f^{2n+1}(x)dx=0$.