. Rezolvare:

a. Pentru $a=1$ matricea devine $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$,

atunci $A^2=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & 5 & -3\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$ şi vom obține

$A^2-2A+3I_3=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ -1 & 4 & -1\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}=B$;

b. $\det A=2a-2a-1=-1$, $\det A=a-3\Leftrightarrow -1=a-3\Leftrightarrow a=2$

c. $\det A=-1$, A este inversabilă $\Leftrightarrow \det A\neq 0$, deci A este inversabilă pentru $(\forall)a\in\mathbb{R}$;

d.Pentru $a=0$ matricea devine $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $\det A=-1$. Calculăm matricea adjunctă

$A^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$, atunci $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}A^*=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

e. Pentru $a=0$ A este inversabilă, atunci soluția ecuației matriceale $AX=B$ va fi $X=A^{-1}B$,

$X=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ -1 & 4 & -1\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 4 & 3\\ 3 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}$;

f. $AC=\begin{pmatrix}a & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 2a & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ a-1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 2a^2+a+1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$CA=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ a-1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 2a & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2 & a & 0\\ 1 & 2 & -1\\ a^2+a & a-1 & 1\end{pmatrix}$

Identificând elementele din egalitatea $AC=CA$ se obține $a=1$.