

Soluție

a). $x * y = 3xy + 6x + 6y + 12 - 2 = 3x(y + 2) + 6(y + 2) - 2 = 3(x + 2)(y + 2) - 2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$

b). Legea de compoziție este asociativă pe \mathbb{R} dacă $x * (y * z) = (x * y) * z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

$$x * (y * z) = (x * y) * z = 9xyz + 18(xy + yz + xz) + 36(x + y + z) + 70.$$

c). $x \in M \Rightarrow x + 2 \geq 0$ și $y \in M \Rightarrow y + 2 \geq 0 \Rightarrow (x + 2)(y + 2) \geq 0$. Se fac calcule și se ajunge la cerință

$$3xy + 6x + 6y + 10 \geq -2 \Rightarrow x * y \geq -2 \Rightarrow x * y \in M$$

d). Proprietatea $\exists e \in \mathbb{R}$ a. î. $x * e = e * x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

Aplicând proprietatea enunțată se obține $e = -\frac{5}{3}.$

e). $a = \dots = x^2 + 8x + 10$ și $b = \dots = \frac{3x^2 + 18x + 20}{2}$, se aplică condiția și se obține $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{34}{5} \end{cases}.$

f). $3^x * 3^{x-1} = 19 \Rightarrow \dots \Rightarrow 3^{2x} + 8 \cdot 3^x - 9 = 0$. Se face substituția $3^x = y, \quad y > 0 \Rightarrow y^2 + 8y - 9 = 0$

$$\Delta = 100 \Rightarrow y_1 = 1 \Rightarrow 3^x = 1 \Rightarrow x = 0 \text{ și } y_2 = -9 \notin (0, +\infty).$$