Soluție

1. a) $f'(x)=\left(x^2-x^{-2}\right)'=\left(x^2\right)'-\left(x^{-2}\right)'=2x+\frac{2}{x^3},\ \forall\, x>0$.

b) Ecuația tangentei la graficul unei funcții în punctul $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ este $d: y-f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$.

În cazul nostru $x_0=1$, $f\left(x_0\right)=0$ și din a) $\Rightarrow f'(1)=4$.

Deci ecuația tangentei la G_f în punctul $A(1,0)\in G_f$ va fi $d: y=4(x-1)\Rightarrow d: 4x-y-4=0$.

c) Avem $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\left(x+\frac{1}{x^3}\right)}{x}=2\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\underbrace{\frac{1}{x^4}}_{\to 0}\right)=2.$

2. a) $F'(x)=(x-\ln x)'=(x)'-(\ln x)'=1-\frac{1}{x}=f(x),\ \ \forall x>0\Rightarrow F$ este o primitivă a funcției f.

b) $\int_1^2 F(x)\cdot f(x)\,dx \overset{\text{F primitivă}\Rightarrow}{\underset{F'(x)=f(x)}{=}} \int_1^2 F(x)\cdot F'(x)\,dx=\left.\frac{F^2(x)}{2}\right|_1^2=\frac{F^2(2)}{2}-\frac{F^2(1)}{2}=\frac{(2-\ln 2)^2-1}{2}$.

c) Aria cerută va fi egală cu $A\left(\Gamma_f\right)=\int_1^e |F(x)|\,dx=\int_1^e \left|\underbrace{x-\ln x}_{>0}\right|dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^e-\int_1^e x'\cdot\ln x\,dx=$

$=\frac{e^2-1}{2}-x\ln x\Big|_1^e+\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{e^2-1}{2}-e+x\Big|_1^e=\frac{e^2-3}{2}.$

.