Rezolvare:

a. Matricea asociată sistemului $A=\begin{pmatrix}2a & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & a & 2\end{pmatrix}$, $A-I_3=\begin{pmatrix}2a & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & a & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a-1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 0\\ 2 & a & 1\end{pmatrix}$,

$$\left(A-I_3\right)^2=\begin{pmatrix}2a-1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 0\\ 2 & a & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2a-1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 0\\ 2 & a & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4a^2-4a+5 & 3a-1 & 2a\\ 4a-2 & 2 & 2\\ 6a & a+2 & 3\end{pmatrix}$$

b. Pentru $a=-1$ se va obține $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}$, atunci

$A^2=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -2 & 0\\ -2 & 3 & 2\\ -2 & -3 & 4\end{pmatrix}$ de unde se obține $B=\begin{pmatrix}7 & -1 & 1\\ 0 & 5 & 2\\ 0 & -4 & 7\end{pmatrix}$.

c. $A=\begin{pmatrix}2a & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & a & 2\end{pmatrix}$, de unde $\det A=4a+2a-2-4=6a-6$.

d. Prima ecuație a sistemului este $2ax+y+z=4$. Înlocuind $x=-1$, $y=-1$ şi respectiv $z=3$, se va obține ecuația având ca necunoscută pe a: $-2a-1+3=4\Leftrightarrow -2a=2\Leftrightarrow a=1$.

e. Sistemul (S) va avea soluție unică (este compatibil determinat) dacă şi numai dacă $\det A\neq 0$ Cum $\det A=6a-6$ se va obține relația $6a-6\neq 0\Leftrightarrow a\neq 1$. Aşadar, sistemul va avea soluție unică pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$

f. Pentru $a=-1$ sistemul devine (S): $\begin{cases}-2x+y+z=4\\ 2x+y=-3\\ 2x-y+2z=5\end{cases}$, matricea asociată $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}$ cu

$\det A=-12$. În acest caz vom avea $\Delta_x=\begin{vmatrix}4 & 1 & 1\\ -3 & 1 & 0\\ 5 & -1 & 2\end{vmatrix}=8+3-5+6=12$,

$\Delta_y=\begin{vmatrix}-2 & 4 & 1\\ 2 & -3 & 0\\ 2 & 5 & 2\end{vmatrix}=12+10+6-16=12$, $\Delta_z=\begin{vmatrix}-2 & 1 & 4\\ 2 & 1 & -3\\ 2 & -1 & 5\end{vmatrix}=-10-8-6-8+6-10=-36$.

Vom avea $x=\dfrac{\Delta_x}{\det A}=\dfrac{12}{-12}=-1$

$y=\dfrac{\Delta y}{\det A}=\dfrac{12}{-12}=-1$

$z=\dfrac{\Delta_z}{\det A}=\dfrac{-36}{-12}=3$

Atunci mulțimea soluțiilor sistemului (S) este $\{(-1;-1;3)\}$