**Soluție**

**1.** Fie $a$ numărul din enunț. Avem $a=\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}-1=1$, deci $a\in\mathbb{N}$.

**2.** Tabelul de semn al funcției $f$ este:

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+ + + +$ | $0$ | $- - -$ | $0$ | $+ + + +$ | |

$f(x)\le 0 \Leftrightarrow x\in\left[\frac{1}{2};\,2\right]$.

**3.** Se impun condițiile $x\le 2$ și $x\ge 0$. Prin ridicare la pătrat ecuația devine $x^2+x-2=0$ cu soluțiile 1 și $-2$.
Cum $x\in[0;\,2]$, rezultă că $x=1$ este unica soluție a ecuației date.

**4.** Mulțimea $A$ are $2^6-1$ submulțimi nevide dintre care $2^3-1$ au toate elementele impare.
Probabilitatea cerută este $\frac{2^3-1}{2^6-1}=\frac{7}{63}=\frac{1}{9}$.

**5.** $P_{\triangle ABC}=AB+BC+AC=\sqrt{2}+\sqrt{13}+\sqrt{5}$.

**6.** Avem $x+\frac{1}{x}\ge 2,\ \forall x>0$, cu egalitate numai pentru $x=1$.
Cum $\alpha\in\left(0;\,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha>0$ și atunci $\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=2\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=1\Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{4}\Rightarrow \sin 2\alpha=\sin\frac{\pi}{2}=1$.