Rezolvare

1. Ecuația $|x-1| = m+6-m^2$ are exact două soluții reale dacă $-m^2+m+6>0$

Rezolvăm inecuația de gradul doi obținem $m \in (-2;3)$.

Cum $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-1;0;1;2\}$.

2.a. Abscisele punctelor de intersecție ale graficului lui f cu axa Ox se obțin rezolvând ecuația $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2+2x-6=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=-1\pm\sqrt{7}$.

Deci $A\left(-1-\sqrt{7};0\right), B\left(-1+\sqrt{7}\right)$ sunt punctele în care graficul funcției f intersectează axa Ox.

2.b. $x_1^2+x_2^2=5 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=5.$

Folosind relațiile lui Viete avem: $9-4(m-1)=5 \Leftrightarrow 4m=8 \Leftrightarrow m=2.$

3. Coordonatele vârfului parabolei associate funcției f sunt $x_v=-\frac{b}{2a}, y_v=-\frac{\Delta}{4a}$ ceea ce revine la $x_v=-\frac{2m}{m+1}; y_v=-\frac{4m^2-4m(m+1)}{4(m+1)}=\frac{m}{m+1}$.

Înlocuind în ecuație $\frac{-2m}{m+1}+2\cdot\frac{m}{m+1}=0$ adevărat pentru orice $m \in \mathbb{R}-\{-1\}$,deci vârful este pe dreapta de ecuație $x+2y=0$.

4.a. Condițiile de existență sunt $\begin{cases} 6-2x\geq 0 \\ 4x-3\geq 0. \end{cases}$.

Ridicând la pătrat avem consecutiv:

$\sqrt{6-2x}+\sqrt{4x-3}=3 \Leftrightarrow \sqrt{(6-2x)(4x-3)}=3-x \Rightarrow 9(3-x)(x-1)=0 \Leftrightarrow x=3, x=1.$

Ecuația este satfăcută de ambele valori reale,deci $\mathbb{S}=\{1;3\}$.

4.b. Folosind proprietățile puterilor ecuația devine: $10^{2x}=\frac{1}{10}\cdot 10\cdot\sqrt{10} \Leftrightarrow 2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\in\mathbb{R}_+^* \Rightarrow \mathbb{S}=\left\{\frac{1}{4}\right\}.$