Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) $f'(x)=e^{x\ln x}.(x\ln x)' = f(x)\cdot(\ln x+1), x>0$.

b) Functia f este descrescatoare pe $\left(0;\frac{1}{e}\right]$ si crescatoare pe $\left[\frac{1}{e},\infty\right)$, deci ea este marginita inferior de numarul $f\left(\frac{1}{e}\right)$.Minimul cerut este $e^{\frac{-1}{e}}$.

c) $f''(x)= f(x)\cdot\left((1+\ln x)^2+\frac{1}{x}\right)>0$,deci f este convexa pe $(0,\infty)$.

2.a) $\int_0^1 g_2(x)dx=\int_0^1\left(1-x+x^2-x^3+\frac{x^4}{1+x}\right)==\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln(x+1)\Big|_0^1=\ln 2$

b) $x\in[0;1]\Rightarrow 0\le\frac{x^{2n}}{1+x}\le x^{2n}$ si integrand aceste inegalitati de la 0 la 1 ,obtinem inegalitatile cerute.

c) Integrand functia g_n obtinem:

$\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\int_0^1\left(1-x+x^2-...-x^{2n-1}+\frac{x^{2n}}{1+x}\right)dx\Rightarrow\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...-\frac{1}{2n}+\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x}dx$, utilizand si b) gasim ca limita este $\ln 2$.