Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a). Se lucrează membrul stâng al legii de compoziție, $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$x * y = 2xy + 2x + 2y + 1 = 2xy + 2x + 2y + 2 - 1 = (2x+2)(y+1) - 1 = 2(x+1)(y+1) - 1.$

b). Pentru $x, y, z \in \mathbb{R}$ se demonstrează că $(x*y)*z = x*(y*z) = 4xyz + 4(xz + yz + xy) + 4(x + y + z) + 3.$

c). Se demonstrează că $\exists e \in \mathbb{R}$ a î $e * x = x * e = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$e * x = x \Rightarrow 2ex + 2e + 2x + 1 = x \Rightarrow 2e(x+1) = -(x+1) \Rightarrow e = \frac{-1}{2} \in \mathbb{R}, \quad x \neq -1.$

Se verifică dacă $e = \frac{-1}{2}$ este element neutru şi pentru $x = -1$.

$\left(\frac{-1}{2}\right) * (-1) = 2\left(\frac{-1}{2}\right)(-1) + 2\left(\frac{-1}{2}\right) + 2(-1) + 1 = 1 - 1 - 2 + 1 = -1.$

d). Se foloseşte **a).** şi atunci din $x * y = -1 \Rightarrow 2(x+1)(y+1) - 1 = -1$ se obține $2(x+1)(y+1) = 0$ care conduce la $x = -1$ sau $y = -1$.

e). Se rezolvă ecuația $x * x = 1 \Leftrightarrow 2x(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -2 \end{cases}$.

Se aplică formula pentru suma cuburilor şi se obține în urma calculelor

$x_1^3 + x_2^3 = (0-2)\left[(0+2)^2 + 0 \cdot (-2)\right] = (-2) \cdot 4 = -8$.

f). I. determinarea elementelor simetrizabile: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\ \exists x' \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ a.î. $x * x' = x' * x = e$.

$x * x' = e \Rightarrow 2xx' + 2x + 2x' + 1 = \frac{-1}{2} \Rightarrow 2x'(x+1) = \frac{-(3+4x)}{2} \Rightarrow x' = \frac{-(3+4x)}{4(x+1)}$.

II. se verifică dacă legea este comutativă pe $\mathbb{R}$ $x * y = y * x \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

$x * y = 2xy + 2(x+y) + 1 = 2yx + 2(y+x) + 1 = y * x$.

Din b)., c)., I şi II $\Rightarrow (\mathbb{R} \setminus \{-1\}, *)$ formează o structură algebrică de grup comutativ.