Solutie:

a) $a=b=0 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A)=1$

b) $A^2=\begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 5 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

c) Dacă $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ este soluție a sistemului , atunci ea verifică ecuațiile sistemului. Din prima ecuație obținem $a^2=-1$,ecuație care nu are soluție în $\mathbb{R}$

d) $\det(A)=a^2b^2+a^2+b^2+1$

$a^2b^2 \geq 0, a^2 \geq 0, b^2 \geq 0 \Rightarrow \det(A) \geq 1$

e) $\det(A), \det\left(A^{-1}\right) \in \mathbb{Z}, \det(A) \geq 1 \Rightarrow \det(A)=1 \Rightarrow a=b=0$

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

f) Din regula lui Cramer $\Rightarrow x=\frac{d_x}{\det(A)}, y=\frac{d_y}{\det(A)}, z=\frac{d_z}{\det(A)} \Rightarrow d_x=0 , d_y=0, d_z=\det(A)$

Soluția sistemului este $(0,0,1)$.