Soluție

1. Fie r rația progresiei. Avem $a_6 = a_3 + 3r$ şi $a_{16} = a_{19} - 3r$, deci $a_6 + a_{16} = a_3 + a_{19} \Rightarrow a_6 + a_{16} = 10$.

2. Ecuația dată are două rădăcini reale distincte dacă şi numai dacă $\Delta > 0$. Avem $\Delta = m^2 + 4m - 4$.
$\Delta > 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\infty, -2-2\sqrt{2}\right) \cup \left(-2+2\sqrt{2}, +\infty\right)$.

3. Făcând substituția $\lg x = y$, ecuația devine $y^2 + y - 6 = 0$ de unde obținem $y_1 = 2$, $y_2 = -3$.
Avem $\lg x = 2 \Leftrightarrow x = 100$, iar $\lg x = -3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{1000}$.

4. Funcția f este strict descrescătoare $\Leftrightarrow f(1) > f(2) > f(3)$.
Orice submulțime a lui B poate fi ordonată descrescător într-un singur mod. Numărul funcțiilor strict descrescătoare $f : A \to B$ este egal cu numărul submulțimilor cu 3 elemente ale mulțimii B, adică este egal cu $C_5^3 = 10$.

5. Fie $Q(a,b)$. Avem $\overrightarrow{MQ} = (a-2)\vec{i} + (b+1)\vec{j}$ şi $\overrightarrow{NP} = \vec{i} + 2\vec{j}$.
$MNPQ$ este paralelogram $\Leftrightarrow \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP} \Leftrightarrow a - 2 = 1$ şi $b + 1 = 2$. Punctul căutat este $Q(3, 1)$.

6. Fie M mijlocul lui $[BC]$. Avem $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)^2$ de unde obținem $AM^2 = \frac{1}{4}\left(AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{4}\left(AB^2 + AC^2 + 2\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\cdot\cos A\right)$. Din teorema cosinusului avem $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cdot\cos A \Rightarrow 2AB\cdot AC\cdot\cos A = AB^2 + AC^2 - BC^2$.
Atunci $AM^2 = \frac{2\left(AB^2 + AC^2\right) - BC^2}{4}$, de unde $AM = \frac{\sqrt{10}}{2}$.