Soluție

1. Numerele $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots, \frac{1}{2^{2008}}$ sunt în progresie aritmetică cu rația $\frac{1}{2}$.

Rezultă că $s = \dfrac{\frac{1}{2^{2009}} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2 - \frac{1}{2^{2008}}$ și de aici $1 < s < 2$.

2. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x - 1 = -4x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$. Punctul de intersecție cerut este $M\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

3. Utilizând relația $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, ecuația devine $\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$.
Notăm $\sin x = y$ și obținem ecuația $y^2 + y - 2 = 0$ cu soluțiile 1 și -2.
Ecuația $\sin x = -2$ nu are soluții (pentru că $-1 \le \sin x \le 1$), iar $\sin x = 1 \Leftrightarrow x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

4. Numărul funcțiilor bijective $f : A \to A$ este $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

5. Patrulaterul convex *ABCD* este paralelogram dacă și numai dacă diagonalele sale au același mijloc.
Mijlocul lui $[AC]$ este $M\left(\frac{3}{2}; 1\right)$. Fie $D(x, y)$. Mijlocul lui $[BD]$ este $M'\left(\frac{-1+x}{2}; \frac{1+y}{2}\right)$.
$M = M' \Leftrightarrow \frac{-1+x}{2} = \frac{3}{2}$ și $\frac{1+y}{2} = 1 \Rightarrow D(4, 1)$.

6. Deoarece $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow \cos x < 0$ și atunci $\cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x} = -\frac{4}{5}$.
Deoarece $\frac{x}{2} \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin\frac{x}{2} > 0$, deci $\sin\frac{x}{2} = +\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.