Rezolvare:

a. $A=\begin{pmatrix} b & 1 & 2 \\ -3 & a & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, de unde $\det A = 3ab-6+2-2a-2b+9 = 3ab-2(a+b)+5$;

b. Pentru $b=2$ matricea devine $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -3 & a & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, de unde $\det A = 4a+1$. Se va obține ecuația cu necunoscuta a: $4a+1=17 \Leftrightarrow a=4$;

c. Pentru $a=1$ matricea devine $A=\begin{pmatrix} b & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, de unde $\det A = b+3$. Matricea este .inversabilă dacă şi numai dacă $\det A \neq 0$, de unde $b+3\neq 0 \Leftrightarrow b\neq -3$. În concluzie matricea A este inversabilă pentru $b\in \mathbb{R}\setminus\{-3\}$.

d. Pentru $a=1$ şi $b=1$ matricea devine $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\det A = 4$. Calculăm matricea adjunctă

$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 11 & 1 & -8 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, atunci $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}A^*=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 11 & 1 & -8 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

e. Ecuația de gradul al doilea $x^2-5x+8=0$ ale cărei soluții sunt x_1 şi x_2 verifică relațiile lui Viete între coeficienții ecuației şi soluțiile acesteia, de unde vom obține $x_1+x_2=5$ şi $x_1x_2=8$. Dacă $a=x_1$ şi $b=x_2$, matricea devine $A=\begin{pmatrix} x_2 & 1 & 2 \\ -3 & x_1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ cu $\det A = 3x_1x_2-2(x_1+x_2)+5$. Prin înlocuire se va obține $\det A = 19$.

f. $\begin{cases} x+y+2z=7 \\ -3x+y+2z=3 \\ x+y+3z=9 \end{cases}$, matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ şi $\det A = 4$. În acest caz vom avea

$\Delta_x=\begin{vmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 9 & 1 & 3 \end{vmatrix}=21+6+18-18-14-9=4$, $\Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ -3 & 3 & 2 \\ 1 & 9 & 3 \end{vmatrix}=9+14-54-6-18+63=8$,

$\Delta_z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix}=9+3-21-7-3+27=8$. Vom avea $x=\dfrac{\Delta_x}{\det A}=\dfrac{4}{4}=1$

$y=\dfrac{\Delta y}{\det A}=\dfrac{8}{4}=2$ şi $z=\dfrac{\Delta_z}{\det A}=\dfrac{8}{4}=2$. Atunci soluția va fi tripletul $(1;2;2)$