Soluție

1.a) Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\frac{2}{3}$, rezultă că dreapta de ecuație $y=\frac{2}{3}$ este asimptotă orizontală spre ∞.

b) Observăm că $a_n > 0$, $\forall$ n ≥ 1. Deoarece $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{5+2n}{4+3n}\le 1$, $\forall$ n ≥ 1, rezultă că şirul este descrescător.

Din $0 < a_n \le a_1$ şi $a_1=\frac{5}{4}$ rezultă $0<a_n\le\frac{5}{4}$, $\forall$ n ≥ 1, deci şirul este şi mărginit.

Fiind descrescător şi mărginit, şirul este convergent , deci are limită.

Notăm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x\in\mathbb{R}$. Din $a_{n+1}=\frac{5+2n}{4+3n}\cdot a_n$ rezultă $x=\frac{2}{3}x$, de unde x = 0. Prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

c) Din $g(x)=f(e^x)$ rezultă $g'(x)=-\frac{7}{(3e^x+4)^2}, \forall x\in\mathbb{R}$ .Atunci $g''(x)=\frac{42e^x}{(3e^x+4)^3}, \forall x\in\mathbb{R}$.

Deoarece $g''(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$ rezultă că f este convexă pe $\mathbb{R}$, prin urmare nu are puncte de inflexiune.

2 a) $\int_0^1 f(e^x)dx=\int_0^1\sqrt{x}dx=3\sqrt{x^3}\Big|_0^1=3$.

b) $Vol(C_f)=\pi\int\limits_1^e \ln x dx$. Dar $\int\limits_1^e \ln x dx = x\ln x - x\Big|_1^e$ **.** Rezultă $Vol(C_f)=\pi\int\limits_1^e \ln x dx=\pi$ **.**

c) Pentru calculul integralei $\int\limits_1^e f(x)dx=\int\limits_1^e\sqrt{\ln x}dx$ utilizăm schimbarea de variabilă

$\sqrt{\ln x}=t \Rightarrow \ln x=t^2 \Rightarrow x=e^{t^2} \Rightarrow dx=2te^{t^2}dt$. Apoi $x=1\Rightarrow t=0$ şi $x=e\Rightarrow t=1$ .Deci

$$\int\limits_1^e\sqrt{\ln x}dx=\int\limits_0^1 2t^2e^{t^2}dt=\int\limits_0^1\left(e^{t^2}\right)'tdt=te^{t^2}\Big|_0^1-\int\limits_0^1 e^{t^2}dt=e-\int\limits_0^1 e^{t^2}dt=e-\int\limits_0^1 e^{x^2}dx .$$

Prin urmare $\int\limits_0^1 e^{x^2}dx+\int\limits_1^e f(x)dx=\int\limits_0^1 e^{x^2}dx+e-\int\limits_0^1 e^{x^2}dx=e$