Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) Avem $f(1)=1-\ln 1=1$. $f'(x)=1-\frac{1}{x}, \forall x>0 \Rightarrow f'(1)=1-\frac{1}{1}=0$ .Prin urmare $f(1)-f'(1)=1-0=1$.

b) $f'(x)=1-\frac{1}{x}=0 \Rightarrow x=1$.Tabelul de variație ne arată că $\begin{cases} f \searrow & pentru\ x\in(0,1] \\ f \nearrow & pentru\ x\in[1,+\infty) \end{cases}$.

Așadar $A(1,1)$ este punct de minim al funcției f .

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=1-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}}1-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=1-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=1$

2. a) $I+J=\int_0^1\frac{e^x}{x+1}dx+\int_0^1\frac{xe^x}{x+1}dx=\int_0^1\left(\frac{e^x}{x+1}+\frac{xe^x}{x+1}\right)dx=\int_0^1\frac{(x+1)e^x}{x+1}dx=\int_0^1 e^x\,dx=e^x\Big|_0^1=e-1$.

b) Din ipoteză $e^x\ge x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}\ \underset{pt.x\in[0,1]}{\overset{x+1>0}{\Rightarrow}}\ \frac{xe^x}{x+1}\ge\frac{x(x+1)}{x+1}=x$ .Integrând acum această ultimă inegalitate pe intervalul $[0,1]$ obținem $J\ge\int_0^1 x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}$.

c) Avem $I=\int_0^1\frac{e^x}{x+1}dx=\int_0^1\left(e^x\right)'\cdot\frac{1}{x+1}dx\ \underset{\text{prin părți}}{\overset{\text{met.int.}}{=}}\ \frac{e^x}{x+1}\Big|_0^1-\int_0^1 e^x\cdot\left(\frac{1}{x+1}\right)'dx=\frac{e-2}{2}+\int_0^1\frac{e^x}{(x+1)^2}dx$.