Soluție:

1. a) Prin calcul direct, obținem $A^3 = 0_3$.

b) $I_3 + A + A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, deci $rang\left(I_3 + A + A^t\right) = 1$.

c) Se arată că $\left(I_3 + A\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, sau prin calcul direct, sau observând că

$I_3 = I_3 + A^3 = \left(I_3 + A\right)\left(I_3 - A + A^2\right)$.

2. a) Se arată că mulțimea rădăcinilor lui f este $\{0, -4-2i, -4+2i\}$.

b) $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -4a$ și $S_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 20$.

Suma din enunț este $S = 2S_1^2 - 6S_2 = 8\left(4a^2 - 15\right)$.

c) Deoarece $x_3 = x_4 = -a$, din prima relație a lui Viète obținem $x_1 = -2a$ și înlocuind în a doua relație a lui Viète rezultă $a \in \{-2, 2\}$.

Pentru $a = -2$, obținem $b = 2a^3 = -16$, iar pentru $a = 2$, obținem $b = 2a^3 = 16$.