Soluție

1. a) Ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției *f* este $y = mx + n$, unde:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1}{x^2+x} = 1 \text{ şi } n = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+1} = 0.$$

b) $f'(x) = \dfrac{\left(x^2+x+1\right)' \cdot (x+1) - \left(x^2+x+1\right)\cdot (x+1)'}{(x+1)^2}$. Deoarece $\left(x^2+x+1\right)' = 2x+1$.

rezultă $f'(x) = \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$.

c) Cum $f''(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3}$, rezultă $f''(x) < 0, \forall x \in (-\infty, -1)$.

Deoarece $f''(x) < 0, \forall x \in (-\infty,-1)$, funcția *f* este concavă pe intervalul $(-\infty,-1)$.

2. a) $\int_0^{\pi} f_2(x)dx = \int_0^{\pi} \left|\sin 2x\right| dx = \int_0^{\pi/2} \sin 2x dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \sin 2x dx = -\dfrac{\cos 2x}{2}\Big|_0^{\pi/2} + \dfrac{\cos 2x}{2}\Big|_{\pi/2}^{\pi} = 0$

b) Cum $\dfrac{\left|\sin(nx)\right|}{x} \le \dfrac{1}{x}, \forall x \in [\pi, 2\pi]$, rezultă $I_n = \displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\left|\sin(nx)\right|}{x} dx \le \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{x} dx$.

Dar $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{x} dx = \ln 2$.

c) Utilizăm schimbarea de variabilă $nx = t$.
Atunci $x = \pi$ implică $t = n\pi$ și $x = 2\pi$ implică $t = 2n\pi$, iar $ndx = dt$.
Rezultă $I_n = \displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\left|\sin nx\right|}{x} dx = \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{\left|\sin t\right|}{\frac{t}{n}} \frac{1}{n} dt = \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{\left|\sin t\right|}{t} dt, \forall n \in \mathbb{N}^*$.