Soluție

1.a. $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = A \Rightarrow A \in \mathcal{G}$.

b. $A^2 = A,$ adev. dem. la punctul a) $A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A = A \Rightarrow \det\left(A^3 - 2A^2 + A\right) = \det\left(A - 2A + A\right) = 0.$

c. $\left(2X - I_2\right)^2 = \left(2X - I_2\right)\left(2X - I_2\right) = 4X^2 - 2XI_2 - 2XI_2 + I_2 = 4X^2 - 4X + I_2 = 4X - 4X + I_2 = I_2$.

2.a. $x * y = xy - \sqrt{2008}\left(x + y\right) + 2008 + \sqrt{2008} = xy - \sqrt{2008}x - \sqrt{2008}y + 2008 + \sqrt{2008} =$

$= x\left(y - \sqrt{2008}\right) - \sqrt{2008}\left(y - \sqrt{2008}\right) + \sqrt{2008} = \left(x - \sqrt{2008}\right)\left(y - \sqrt{2008}\right) + \sqrt{2008}\ \forall x, y \in \mathbf{R}$.

b. Se arată că $\exists e \in \mathbb{R}$ astfel încât $x * e = e * x = x, \forall x \in \mathbb{R}$.
Existența elementului e se determină din $x * e = x, \forall x \in \mathbb{R}$ de unde se obține $e = \sqrt{2008} + 1$.
Apartenența lui e la **R** este evidentă: $\sqrt{2008} + 1 \in \mathbb{R}$.

c. Datorită asociativității legii $*$, grupând termenii şi ținând cont de cerința a),
obținem $\left[\left(-\sqrt{2008}\right) * \left(-\sqrt{2007}\right) * \ldots * 0 * \ldots * \left(\sqrt{2007}\right)\right] * \left(\sqrt{2008}\right) = \alpha * \left(\sqrt{2008}\right) = \sqrt{2008}$
unde am notat cu $\alpha = \left(-\sqrt{2008}\right) * \left(-\sqrt{2007}\right) * \ldots * 0 * \ldots * \left(\sqrt{2007}\right) \in \mathbf{R}$.