

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. Numerele 1, 4, 7, ..., 31 sunt 11 termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice cu rația 3.

$$\text{Atunci } 1 + 4 + 7 + \dots + 31 = \frac{(1+31) \cdot 11}{2} = 176.$$

2. $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} / \exists x \in \mathbb{R} \text{ astfel încât } f(x) = y\}.$

Avem $f(x) = y \Leftrightarrow x^2 + x + 1 - y = 0$. Această ecuație are soluții reale dacă și numai dacă $\Delta \geq 0$.

$$\Delta = 1 - 4(1 - y); \Delta \geq 0 \Leftrightarrow y \geq \frac{3}{4}. \text{ În concluzie, } \text{Im}(f) = \left[\frac{3}{4}; \infty\right).$$

$$3. E = \sin\left(\arcsin \frac{1}{2}\right) + \sin\left(\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$$

4. Termenii dezvoltării sunt $T_{k+1} = C_5^k (\sqrt{2})^{5-k} \cdot 1^k = C_5^k \sqrt{2}^{5-k}, k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$

Deoarece $C_5^k \in \mathbb{N}$ avem $T_{k+1} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow 5 - k = \text{par} \Leftrightarrow k \in \{1, 3, 5\}$. Dezvoltarea are trei termeni raționali.

5. $ABCD$ pătrat $\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$. Atunci $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\| = 2 \cdot \|\overrightarrow{AC}\| = 2\sqrt{2}.$

6. Avem: $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ.$

$$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$