Rezolvare:

a. $AB=\begin{pmatrix}1 & 3a\\ 0 & 2b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 3a\\ 0 & 2b\end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3a\\ 0 & 2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 3a^2\\ 0 & 2b\end{pmatrix}$.

Atunci $M=AB-BA=\begin{pmatrix}0 & 3a-3^2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

b. $A=\begin{pmatrix}1 & 3a\\ 0 & 2b\end{pmatrix}$, atunci $\det A=2b$ de unde se obține ecuația $2b=6 \Leftrightarrow b=3$.

c. Pentru $b=1$ matricea A devine $A=\begin{pmatrix}1 & 3a\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, A inversabilă dacă şi numai dacă $\det A\neq 0$. Dar cum $\det A=2\neq 0$, obținem că pentru $b=1$ matricea este inversabilă pentru $(\forall)a\in\mathbb{R}$.

d. $A=\begin{pmatrix}1 & 3a\\ 0 & 2b\end{pmatrix}$, $\det A=2b$ şi cum $b\neq 0$ matricea A este inversabilă. Calculăm matricea adjunctă

$A^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2b & -3a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, atunci $A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^*=\frac{1}{2b}\begin{pmatrix}2b & -3a\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{3a}{2b}\\ 0 & \frac{1}{2b}\end{pmatrix}$.

e. Pentru $a=1$ şi $b=1$, matricele A şi B devin $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\det A=-1$ şi $\det B=1$, deci ambele matrice sunt inversabile, $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{3}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $B^{-1}=B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. În acest caz soluția ecuației matriceale va fi $X=A^{-1}CB^{-1}$, de unde prin calcul se obține $X=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{5}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -5\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

f. Conform rezultatului obținut la punctul a. vom avea $AB=\begin{pmatrix}a & 3a\\ 0 & 2b\end{pmatrix}$ şi $BA=\begin{pmatrix}a & 3a^2\\ 0 & 2b\end{pmatrix}$.

Identificând elementele din egalitatea $AB=BA$ se obțin relațiile
$2b=2b$ şi $3a=3a^2 \Leftrightarrow a^2-a=0 \Leftrightarrow a(a-1)=0 \Leftrightarrow a_1=0, a_2=1$ şi $b\in\mathbb{R}$.
Deci, perechile de numere reale căutate sunt: $(0;b)$ şi $(1;b)$ pentru $b\in\mathbb{R}$.