Rezolvare

1.Știind că abscisa punctului de intersecție al graficului cu axa Ox verfică ecuația $f(x)=0,$ avem $3a\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-5=0\Leftrightarrow a=-5.$ Atunci $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-15x-5$ este o funcție descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

2.a. Abscisele punctelor de intersecție al graficului cu axa Ox le calculăm rezolvând ecuația $f(x)=0. \Leftrightarrow x^2-x+\frac{1}{4}=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\Rightarrow G_f\cap Ox=\left\{\left(\frac{1}{2},0\right)\right\}.$

2.b.

Asociem ecuația de gradul II sistemului simetric $t^2-8t+7=0$
cu soluțiile $1;7$

Deci mulțimea soluțiilor sistemului $\mathbb{S}=\{(1,7),(7,1)\}$.

3.Coordonatele vârfului parabolei associate sunt
$x_V=-\frac{b}{2a}; y_V=\frac{\Delta}{4a}\Leftrightarrow x_V=-\frac{m+1}{4}; y_V=-\frac{(m+1)(m-7)}{8}.$ Vârful va fi situate deasupra axei Ox dacă $y_V<0\Leftrightarrow(m+1)(m-7)<0\Leftrightarrow m\in(-1;7),$ dar $m\in\mathbb{Z}$ atunci $m\in\{0;1;2;3;4;5;6\}.$

4.a. Notăm cu $y=\sqrt[3]{x}, y\in\mathbb{R},$ atunci avem $2y^2+y-3=0$ cu rădăcinile $y_1=1; y_2=-\frac{3}{2}.$

Înlocuind obținem $x=1$ sau $x=-\frac{27}{8}.$ Ambele valori verifică ecuația ,deci $\mathbb{S}=\left\{-\frac{27}{8};1\right\}.$

4.b. Condițiile de existență sunt $\begin{cases} x+6>0 \\ 2x-3>0. \end{cases}$

Aplicând proprietățile logaritmilor obținem: $\frac{(x+6)^2}{2x-3}=16\Leftrightarrow x^2-20x+84=0\Leftrightarrow x_1=14$ sau $x_2=6.$ Ambele valori verifică ecuația $\mathbb{S}=\{6;14\}.$