Rezolvare:

a. $AB=\begin{pmatrix}3b & 2a\\ 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3ab & 2a\\ 4a & 1\end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3b & 2a\\ 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3ab & 2a^2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$.

Atunci $M=AB-BA=\begin{pmatrix}0 & 2a-2a^2\\ 4a-4 & 0\end{pmatrix}$

b. Pentru $a=-3$ se va obține $A=\begin{pmatrix}3b & -6\\ 4 & 1\end{pmatrix}$, atunci $\det A=3b+24$ de unde se obține ecuația

$3b+24=6\Leftrightarrow b=-6$.

c. Pentru $b=8$ matricea A devine $A=\begin{pmatrix}24 & 2a\\ 4 & 1\end{pmatrix}$, A inversabilă dacă şi numai dacă $\det A\neq 0$. Cum $\det A=24-8a$, obținem $24-8a\neq 0\Leftrightarrow a\neq 3$, de unde rezultă că pentru $b=8$, matricea A este inversabilă pentru $(\forall)a\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

d. $A=\begin{pmatrix}3b & 2a\\ 4 & 1\end{pmatrix}$, $\det A=3b-8a$ şi cum $3b\neq 8a$, obținem $\det A\neq 0$, deci, matricea A este inversabilă.

Calculăm matricea adjunctă $A^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2a\\ -4 & 3b\end{pmatrix}$, atunci

$A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}A^*=\dfrac{1}{3b-8a}\begin{pmatrix}1 & -2a\\ -4 & 3b\end{pmatrix}$.

e. Pentru $a=1$ şi $b=3$, matricele A şi B devin $A=\begin{pmatrix}9 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\det A=1$ şi $\det B=1$, deci ambele matrice sunt inversabile, $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -4 & 9\end{pmatrix}$, $B^{-1}=B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. În acest caz soluția ecuației matriceale va fi $X=A^{-1}CB^{-1}$, de unde prin calcul se obține $X=\begin{pmatrix}-4 & -2\\ 17 & 11\end{pmatrix}$.

f. Conform rezultatului obținut la punctul a. vom avea $AB=\begin{pmatrix}3ab & 2a\\ 4a & 1\end{pmatrix}$ şi $BA=\begin{pmatrix}3ab & 2a^2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$.

Identificând elementele din egalitatea $AB=BA$ se obțin relațiile $2a=2a^2$ şi $4a=4$. Prin calcul se va obține $a=1$ şi $b\in\mathbb{R}$.
Deci, perechile de numere reale căutate sunt de forma $(1;b)$, pentru $b\in\mathbb{R}$.