Soluții

1. **a)** $a = b = c = d = 0$; $0 \in \mathbb{R} \Rightarrow O_3 \in M$.

b) $A_1A_2 = \begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1b_2 + b_1a_2 & a_1c_2 + c_1a_2 + b_1d_2 \\ 0 & a_1a_2 & a_1d_2 + d_1a_2 \\ 0 & 0 & a_1a_2 \end{pmatrix}$; are elementele în $\mathbb{R}$, cele de pe diagonală egale și 0 sub diagonală, deci e din M.

c) $\det A = a^3$; $a^3 = 0 \Leftrightarrow a = 0$; $A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & bd \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A^3 = O_3$.

2. a) $f = X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$; $q = X^2 - X, r = 1$.

b) $f(1) = -1 \Leftrightarrow c = -a - b - 1$. Restul împărțirii la $X^2 + 1$ este $(b+1)X - 2a - b$; $a = b = 0, c = -1$.

c) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, x_1x_2 + ... + x_3x_4 = a$; $\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 - 2a$; $1 - 2a < 0 \Rightarrow$ nu pot fi toate rădăcinile reale.