

Soluții

$$\mathbf{1.a)} \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DA} \\ \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} \text{ căci } \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DA} = \vec{0}$$

$$\mathbf{1.b)} \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{GA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\ \overrightarrow{GB} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) \\ \overrightarrow{GC} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}) = \vec{0}$$

$$\mathbf{2.a)} \left. \begin{array}{l} AB^2 = 9 + 1 = 10 \\ AC^2 = 1 + 49 = 50 \\ BC^2 = 4 + 36 = 40 \end{array} \right\} \Rightarrow AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow \triangle ABC \text{ este dreptunghic în } B.$$

$$\mathbf{2.b)} R = \frac{2}{3}AM, \text{ unde } M \text{ este mijlocul laturii } [BC] \Rightarrow R = \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

$$\mathbf{3.a)} M(2,3), \text{ unde } M \text{ este mijlocul segmentului } [AB].$$

$$m_{AB} = 1 \Rightarrow y - 3 = -1(x - 2) \Rightarrow \text{ecuația mediatoarei segmentului } [AB] \text{ este } d : x + y - 5 = 0.$$

$$\mathbf{3.b)} d : x + y - 5 = 0 \text{ este ecuația mediatoarei segmentului } [AB] \text{ (vezi punctul a).}$$

$$C \in d \Rightarrow a = 4.$$

$$CM = \sqrt{(4-2)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{2} \text{ unde } M \text{ este mijlocul segmentului } [AB].$$

$$AB = \sqrt{(4+4)} = 2\sqrt{2}.$$

$$\sigma[ABC] = \frac{CM \cdot AB}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$