Soluție

1. a) Calcul direct
b) Se demonstrează prin calcul direct, ținând cont de faptul că
$\forall\, k \in \{1, 2\}$, $\quad x_k \cdot g(x_k) = a \cdot x_k^3 + b \cdot x_k^2 + c \cdot x_k = a + b \cdot x_k^2 + c \cdot x_k$ și
$x_k^2 \cdot g(x_k) = a \cdot x_k^4 + b \cdot x_k^3 + c \cdot x_k^2 = a \cdot x_k + b + c \cdot x_k^2$.
c) Din **b)** se obține $\det(A) = g(1) \cdot g(x_1) \cdot g(x_2)$.
$\det(A) = 0 \iff$ cel puțin unul dintre numerele $1, x_1, x_2$ este rădăcină și pentru g.
Obținem $a + b + c = 0$ sau $a = b = c$.
2. a) $f(\hat{0}) = f(\hat{1}) = \hat{0}$.
b) Cum f nu e injectivă, iar domeniul său este o mulțime finită și coincide cu codomeniul, rezultă că f nu este surjectivă.
c) Singurele rădăcini ale polinomului sunt $x_1 = \hat{0}$ și $x_2 = \hat{1}$.
Descompunerea în factori ireductibili a polinomului peste $\mathbb{Z}_5$ este $X^4 + \hat{4}X = X\left(X + \hat{4}\right)\left(X^2 + X + \hat{1}\right)$.