Soluție

1.a) $I_2 + A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow (I_2 + A)^2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} = I_2 + A.$

b) $A^2 = -A$, $A^3 = A^2 \cdot A = -A \cdot A = -A^2 = A$. Prin inducție matematică rezultă că $A^n = (-1)^{n-1} A, \forall n \in \mathbb{N}^*$, deci $\left\{A^n \middle| n \in \mathbb{N}^*\right\} = \{-A, A\}$.

c) Fie $B = 2008I_2 - A + A^2 - A^3 + ... + A^{2008} = 2008I_2 - 2008A = 2008(I_2 - A)$.

Cum $I_2 - A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = 2 \cdot 2008^2$.

2.a) $f(1) + f(-1) = a_n\left(1 + (-1)^n\right) + a_{n-1}\left(1 + (-1)^{n-1}\right) + ... + a_1\left(1 + (-1)\right) + 2a_0$

$1 + (-1)^k \in \{0, 2\}$, pentru orice $k \in \{1, 2, ..., n\}$, deci $f(1) + f(-1)$ este număr par

b) Presupunem că ecuația $f(x) = 0$ are o rădăcină întreagă *k*; atunci $f(x) = (x - k)g(x)$, unde g este un polinom cu coeficienți întregi.

$f(2) = (2 - k)g(2)$ este impar, deci $2 - k$ este impar

$f(3) = (3 - k)g(3)$ este impar, deci $3 - k$ este impar

Atunci $2 - k + 3 - k = 5 - 2k$ este par, contradicție.

c) Dacă polinomul $g = X^3 - X + 3a + 1$ ar putea fi descompus în produs de două polinoame neconstante, cu coeficienți întregi, unul dintre aceste polinoame ar fi de gradul 1, deci g ar avea o rădăcină rațională

$x_0 = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \geq 1, (p, q) = 1$, astfel încât $p \mid 1$ și $q \mid 1$. Rezultă $x_0 \in \{-1, 1\}$.

Pentru $x_0 = -1 \Rightarrow g(-1) = 3a + 1 = 0$ dacă și numai dacă $a = -\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$.

Pentru $x_0 = 1 \Rightarrow g(1) = 3a + 1 = 0$ dacă și numai dacă $a = -\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$.