Soluție

1.a. Adăugând la ambele părți ale ecuației $\hat{1}$ avem: $\hat{2}\cdot \hat{x}+\hat{5}+\hat{1}=\hat{1}+\hat{1} \Leftrightarrow \hat{2}\cdot \hat{x}=\hat{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{x}_1=\hat{1} \\ \hat{x}_2=\hat{4} \end{cases}$.

b. $D=\begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{2} & \hat{3} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{2} \end{vmatrix}=\hat{1}\cdot\hat{2}\cdot\hat{3}+\hat{2}\cdot\hat{1}\cdot\hat{3}+\hat{3}\cdot\hat{2}\cdot\hat{1}-\hat{3}\cdot\hat{3}\cdot\hat{3}-\hat{1}\cdot\hat{1}\cdot\hat{1}-\hat{2}\cdot\hat{2}\cdot\hat{2}=\hat{0}+\hat{0}+\hat{0}+\hat{3}+\hat{5}+\hat{4}=\hat{0}$.

c. Înmulțind prima ecuație cu $\hat{3}$ obținem $\hat{x}=\hat{5}, \hat{y}=\hat{0}$ și înmulțind a doua ecuație cu $\hat{3}$ obținem $\hat{3}\hat{x}=\hat{3}$ de unde $\hat{x}=\hat{1}, \hat{y}=\hat{2}$ sau $\hat{x}=\hat{3}, \hat{y}=\hat{4}$ deci avem soluțiile $\hat{x}=\hat{1}, \hat{y}=\hat{2}$ sau $\hat{x}=\hat{3}, \hat{y}=\hat{4}$ sau $\hat{x}=\hat{5}, \hat{y}=\hat{0}$.

2.a. $A_x \cdot A_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x+y & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_{x+y}$. c.c.t.d.

b. Din relatia $A_x \cdot A_0 = A_x \Rightarrow I_3 = A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – element neutru .

c. $f(x)=f(y) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x=y \Rightarrow$ f.injectivă

$\forall A_x \in G; \exists\, x \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x)=A_x$ f.surjectivă deci f este bijectivă