

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $a * a = \sqrt{a^2 + a^2 - a^2} = \sqrt{a^2} = |a| = -a$ pentru $a < 0$.

b) $\left. \begin{array}{l} x \geq a \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq a^2 \\ y \geq a \geq 0 \Rightarrow y^2 \geq a^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 - a^2} \geq \sqrt{a^2} = |a| = a$. Deci $x * y \geq a$.

c) $(x * y) * z = \left(\sqrt{x^2 + y^2 - a^2} \right) * z = \sqrt{\left(\sqrt{x^2 + y^2 - a^2} \right)^2 + z^2 - a^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2a^2} =$
 $= (x * y) * z, \forall x, y, z \in G$.

d) $x * a = \sqrt{x^2 + a^2 - a^2} = \sqrt{x^2} = x, \forall x \geq a \geq 0$.

Analog $a * x = x$, deci „ $*$ ” admite ca element neutru $a \in [a, +\infty), a \geq 0$.

e) Fie $x \in [a, +\infty), a \geq 0$. Presupunem că $\exists x' \in [a, +\infty)$ astfel ca $x * x' = x' * x = a$.

$$x * x' = \sqrt{x^2 + x'^2 - a^2} \Rightarrow x^2 + x'^2 - a^2 = a^2 \Rightarrow x'^2 = 2a^2 - x^2.$$

Dar $x' \geq a \geq 0 \Rightarrow x' = \sqrt{2a^2 - x^2}$. Din $x' \in [a, +\infty) \Rightarrow x' \geq a \geq 0 \Rightarrow x'^2 \geq a^2 \Rightarrow 2a^2 - x^2 \geq a^2 \Rightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 \leq a^2 \\ \Rightarrow x \geq 0 \\ a \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x \leq a \text{ și } x \geq a \Rightarrow x = a. \text{ Singurul element simetrizabil este elementul neutru } a.$$

f) $(2x+1) * a = a * (x+2) \Rightarrow |2x+1| = |x+2| \Rightarrow x \in \{1; -1\}$.