Rezolvare:

1. $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!},\ n,\ k \in \mathbb{N},\ n \geq k.$. Condiția de existență a numărului A_n^2 este $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2;$

$$A_n^{\ 2} = 2 \Leftrightarrow n(n-1) = 2 \Leftrightarrow n^2 - n - 2 = 0 \Leftrightarrow n \in \{-1, 2\};\quad \left.\begin{array}{l} n \in \{-1, 2\} \\ n \in \mathbb{N} - \{0, 1\} \end{array}\right\} \Rightarrow n = 2.$$

2. Condiția de existență: $x^2 + 5 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

$\log_3\left(x^2 + 5\right) = 2 \Leftrightarrow x^2 + 5 = 9 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$ **;** Mulțimea soluțiilor ecuației este : $\{-2, 2\}$.

3. $a_1 = 1$, rația r=4; $S_n = \dfrac{2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot r}{2} \cdot n,\ n \geq 1;\ S_{10} = \dfrac{2 \cdot 1 + 9 \cdot 4}{2} \cdot 10 \Rightarrow S_{10} = 190$.

4. Se aplică în $\triangle ABC$ teorema sinusurilor: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$;

$\dfrac{b^2 \sin^2 A}{a^2} + \dfrac{c^2 \sin^2 A}{a^2} = \sin^2 A \Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2 \Leftrightarrow$ $\triangle ABC$ este dreptunghic.

5. Ecuația din mulțimea A are produsul rădăcinilor egal cu 3. Așadar, soluțiile acestei ecuații sunt 1 și 3. Suma lor este 4 şi conform relațiilor lui Viète $-a = 4 \Rightarrow a = -4$. În ecuația din mulțimea B, înlocuind pe $a = -4$, se obține produsul rădăcinilor egal cu -3 . Aşadar soluțiile ecuației din mulțimea B sunt 1 si -3 a căror sumă este -2 . Din relațiile lui Viète rezultă că $b = 2$.

6. În triunghiul ABD , F este mijlocul segmentului $[BD]$. Rezultă: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2 \cdot \overrightarrow{AF}$.

Analog: $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = 2 \cdot \overrightarrow{CF}$

Adunând aceste două relații , obținem: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 2 \cdot \left(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CF}\right)$ (1)

În triunghiul AFC , punctul E este mijlocul segmentului $[AC]$; $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CF} = 2 \cdot \overrightarrow{EF}$ (2)

Din (1) şi (2) se obține concluzia din problemă.