Rezolvare

1. a) $f'(x)=\dfrac{e^x-(x+1)e^x}{e^{2x}}=-\dfrac{x}{e^x}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$ deci $y=0$ este asimptotă orizontală la $+\infty$.

c) Din semnul derivatei se obține că f este crescătoare pe $(-\infty,0]$ şi descrescătoare pe $[0,+\infty)$ şi atunci $f(x)\le f(0)=1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

2. a) $\int(x+4)^2\cdot f_1(x)\,dx=\int(x+4)dx=\dfrac{x^2}{2}+4x+C$.

b) $\int\limits_0^1 xf_2(x)dx=\int\limits_0^1\dfrac{x}{x^2+4}dx=\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)\Big|_0^1=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{5}{4}\right)$.

c) Din $0\le x^{2008}\le 1$, $\forall x\in[0,1]$ rezultă $\dfrac{1}{5}\le f_{2008}(x)\le\dfrac{1}{4}$, $\forall x\in[0,1]$,de unde prin integrare obținem $A\left(\Gamma_{f_{2008}}\right)=\int\limits_0^1 f_{2008}(x)\,dx\in\left[\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{4}\right]$.