

Rezolvare

$$1. A \in G_f \Leftrightarrow f(1) = 3 \Leftrightarrow a + b = 3$$

$$B \in G_f \Leftrightarrow f(-1) = 1 \Leftrightarrow -a + b = 1$$

$$\text{Rezolvând sistemul } \begin{cases} a+b=3 \\ -a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b=4 \\ 2a=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ a=1 \end{cases}$$

$$2.a) \text{ Coordonatele vârfului parabolei sunt : } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{7}{2} \text{ și } y = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{49-36}{4} = -\frac{13}{4}$$

$$b) \text{ Folosind relațiile lui Viète } \begin{cases} x_1 \cdot x_2 = 9 \\ x_1 + x_2 = -7 \end{cases} \text{ avem}$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = (-7)^3 - 3 \cdot 9 \cdot (-7) = -154$$

$$3. \text{ Dreapta de ecuație } y = -x + m \text{ este tangenta parabolei } y = -x^2 + 8x - 9 \text{ dacă sistemul } \begin{cases} y = -x^2 + 8x - 9 \\ y = -x + m \end{cases}$$

are soluție unică, $-x^2 + 8x - 9 = -x + m \Leftrightarrow x^2 - 9x + 9 + m = 0$ are soluție unică $\Rightarrow \Delta = 0$

$$\Delta = 81 - 4(9 + m) = 81 - 36 - 4m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{45}{4}.$$

$$4.a) \text{ Notăm } 2^x = t, 0 < t, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Atunci ecuația devine } t^2 - 9t + 8 = 0 \Leftrightarrow t = 1; t = 8.$$

$$\text{Înlocuind avem } 2^x = 1 \text{ sau } 2^x = 8$$

$$\Downarrow$$

$$\Downarrow$$

$$x = 0$$

$$x = 3$$

$$\text{Cum } 0; 3 \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{S} = \{0; 3\}$$

$$b) \text{ Condiția de existență este } x \in \mathbb{R}_+^*$$

$$\log_2^2 x - 3 \log_2 \sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 - \frac{3}{2} \log_2 x - 1 = 0$$

$$\text{Notăm } \log_2 x = t, t \in \mathbb{R} \text{ atunci ecuația devine } t^2 - \frac{3}{2}t - 1 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 2, t_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Înlocuind avem } \log_2 x = 2 \text{ sau } \log_2 x = -\frac{1}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\Downarrow$$

$$x = 4 \in \mathbb{R}_+^*, \quad x = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}_+^*$$

$$\text{Ca urmare suma soluțiilor ecuației este } 4 + \frac{1}{\sqrt{2}} = 4 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{8 + \sqrt{2}}{2}.$$