Soluție

1.a) Dacă $x \in \mathbb{Q}$, atunci $\left|f(x)\right| \le |x| \Leftrightarrow |x| \le |x|$, evident. Dacă $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $\left|f(x)\right| \le |x| \Leftrightarrow \left|x^3\right| \le |x|$ şi

$\left|x^3\right| \le |x| \Leftrightarrow |x|\left(|x|^2 - 1\right) \le 1$, evident pentru $x \in [-1,1] \Leftrightarrow |x| \le 1$

b) Din $\left|f(x)\right| \le |x|, \forall x \in [-1,1]$ rezultă $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. Cum $f(0) = 0$ rezultă că f este continuă în origine.
Deci f este continuă în origine.

c) Deoarece $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ rezultă că pentru orice şir $(x_n)_{n \ge 1}$ care are limita 0, şirul $\left(f(x_n)\right)_{n \ge 1}$ are limita 0.În particular considerând $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, rezultă $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} f\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0$..

2.a) f este continuă şi derivabilă. Din continuitatea lui f rezultă $b = 0$.
Apoi $f'(x) = ae^x + axe^x - 1, \forall x < 0$ şi $f'(x) = \cos x - x \sin x, \forall x > 0$.
Cu o consecință a teoremei lui Lagrange rezultă
$\lim\limits_{x \searrow 0} f'(x) = \lim\limits_{x \nearrow 0} f'(x) = f'(0) \Rightarrow a - 1 = 1 \Rightarrow a = 2$.

b) $\int_{-\pi}^{1} f(x)dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx$.

Dar $\int_{-\pi}^{0} f(x)dx = \int_{-\pi}^{0} x \cos x dx = \int_{-\pi}^{0} x(\sin x)' dx = -\int_{-\pi}^{0} \sin x dx = \int_{-\pi}^{0} (\cos x)' dx = 2$, iar

$\int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{1} \left(2xe^x - x\right) dx = \dfrac{3}{2}$. Rezultă $\int_{-\pi}^{1} f(x)dx = \dfrac{7}{2}$.

c) Dacă $b = 0$, atunci $I_n = \int_0^{\pi} x^n f(x)dx = \int_0^{\pi} x^{n+1} \cos x dx = \int_0^{\pi} x^{n+1} (\sin x)' dx = -(n+1)\int_0^{\pi} x^n \sin x dx$.

Cum $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi $\forall x \in [0, \pi]$, $x^n \sin x \ge 0$, rezultă $I_n \le 0, \forall n \ge 1$. Apoi

$I_n = -(n+1)\int_0^{\pi} x^n \sin x dx = (n+1)\int_0^{\pi} x^n (\cos x)' dx = -(n+1)\pi^n - n(n+1)I_{n-1}$. Cum $I_{n-1} \le 0, \forall n \ge 2$ rezultă

$I_n \ge -(n+1)\pi^n, \forall n \ge 2$. Deoarece $\lim\limits_{n \to \infty} \left(-(n+1)\pi^n\right) = -\infty$ rezultă $\lim\limits_{n \to \infty} \int_0^{\pi} x^n f(x)dx = \lim\limits_{n \to \infty} I_n = -\infty$.