Rezolvare

1) **a)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1=m$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\left|x^2-x\right|}+x\right)\frac{1}{2}=n\Rightarrow y=-x+\frac{1}{2}$ este asimptotă oblică spre $-\infty$..

b) f este derivabilă pe intervalul $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ şi 0 şi 1 sunt puncte de întoarcere ale graficului.

c) $f'(x)=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$; $x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ şi $f'(x)=\frac{1-2x}{2\sqrt{x^2-x}}$; $x\in(0,1)$.

Pentru $x\in(-\infty,0)$, f este strict descrescătoare, iar pentru $x\in(1,+\infty)$, f este strict crescătoare.

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$, deci 0 şi 1 sunt puncte de minim (şi de întoarcere), iar $\frac{1}{2}$ este punct de maxim.

2) **a)** $\mathrm{I}_2=\int_0^1\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx=x\Big|_0^1-\operatorname{arctg}x\Big|_0^1=1-\frac{\pi}{4}$.

b) $\mathrm{I}_{n+2}+\mathrm{I}_n=\int_0^1\frac{x^n(x^2+1)}{x^2+1}dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{n+1}$.

c) Din (**b**) $\Rightarrow\frac{1}{2(n+1)}\le\mathrm{I}_n\le\frac{1}{2(n-1)}$ folosind monotomia lui $(\mathrm{I}_n)_{n\ge1}$. Conform criteriului cleştelui avem $\lim\limits_{n\to\infty}n\,\mathrm{I}_n=\frac{1}{2}$.