Rezolvare:

a. Pentru $a=1$ matricea devine $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$,

atunci $A^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 5 & 1\\ 2 & 6 & 0\\ 15 & 11 & 7\end{pmatrix}$ şi vom obține

$A^2+3A-I_3=\begin{pmatrix}13 & 11 & 4\\ 11 & 8 & -3\\ 27 & 14 & 12\end{pmatrix}=B$;

b. Pentru $a=1$ matricea devine $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$ şi vom obține $\det A=-18$;

c. $\det A=2+3a^2-8-4a+a-12=3a^2-3a-18$;

d. $M=\{a\in\mathbb{Z}\setminus 1\le a\le 3\}\Leftrightarrow a\in\{1;2;3\}$. $A$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det A\neq 0$.

Pentru $a=1$ se obține $\det a=3-3-18=-18\neq 0$, deci $A$ este inversabilă;
Pentru $a=2$ se obține $\det a=12-6-18=-12\neq 0$, deci $A$ este inversabilă;
Pentru $a=3$ se obține $\det a=27-9-18=0$, deci $A$ nu este inversabilă;
În concluzie matricea $A$ este inversabilă pentru $a\in\{1;2\}$.

e. Pentru $a=1$ matricea devine $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$ şi avem $\det A=-18$. Calculăm matricea adjunctă

$A^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -3 & -3\\ -10 & -2 & 4\\ -1 & 7 & -5\end{pmatrix}$, atunci $A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^*=-\frac{1}{18}\begin{pmatrix}3 & -3 & -3\\ -10 & -2 & 4\\ -1 & 7 & -5\end{pmatrix}$.

f. Ecuația matriceală $A^2+X=B$ are soluția $X=B-A^2$, de unde prin calcul se va obține
$X=\begin{pmatrix}2 & 7 & 3\\ 9 & 2 & -3\\ 12 & 3 & 5\end{pmatrix}$.