Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

a) $f(x) \geq 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x+5} \geq 2 \Big|^2 \Leftrightarrow x^2-2x+5 \geq 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$, pătratul oricărui număr real este pozitiv

b) $f(-1)\cdot f(3) = 8 \Rightarrow \int_{-1}^{3} [f(-1)\cdot f(3)]\cdot |x| dx = -8\int_{-1}^{0} xdx + 8\int_{0}^{3} xdx = -8\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + 8\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{3} = 40$

c) $f^2(1-x) = x^2+4 \Rightarrow \int_{-1}^{1}\left[f^2(1-x)-4\right]dx = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}; \Rightarrow \frac{2}{3} < m, m \in \mathbb{N},$ m cel mai mic $\Rightarrow m = 1$

d) $f^2(x)-5 = x^2-2x \Rightarrow \int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{x-2}{f^2(x)-5} dx = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{x} dx = \ln|x|\Big|_{\frac{1}{e}}^{e} = \ln e - \ln\frac{1}{e} = 2 \in \mathbb{N}$

e) notăm $g:[a,b] \to \mathbb{R}, g(x) = f^2(x) = x^2-2x+5$ şi folosim teorema de medie pentru funcția g : „$m\cdot(b-a) \leq \int_a^b g(x)dx \leq M\cdot(b-a), \forall a,b \in \mathbb{R}, a \leq b$**,** unde m şi M sunt valorile de minim respectiv maxim ale funcției g în intervalul $[a,b]$**”**; $g(x) \geq g(1) = 1^2 - 2\cdot 1 + 5 = 4 \Rightarrow \int_a^b f^2(x)dx \geq 4(b-a)$

f) $V_f = \pi\cdot\int_a^b f^2(x)dx \Rightarrow V_f = \pi\cdot\int_{-1}^{1}\left(x^2-2x+5\right)dx = \pi\cdot\left(\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + 5x\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{32\pi}{3}$