Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) Avem ca $f'(x)=\frac{\ln x}{x},\ f''(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}\geq 0, x\in(0,e]$,de unde se obtine concluzia.

b)Dreapta x=0 este asimptota verticala.Nu exista alte asymptote.

c) Se aplica T. Lui Lagrange functiei f pe $[k;k+1]$ si rezulta inegalitatile

$\frac{\ln(k+1)}{k+1}< f(k+1)-f(k)<\frac{\ln k}{k}$. Adunand ineg.anterioare pentru k de la 3 la n

Obtinem $a_n+\frac{\ln(n+1)}{n+1}-\frac{\ln 3}{3}< f(n+1)-f(3)<a_n$

Atunci $a_n > f(n+1)-f(n)-f(3)>-f(3)$,deci sirul e marginit inferior

$a_{n+1}-a_n=\frac{\ln(n+1)}{n+1}-\left(f(n+1)-f(n)\right)=f'(n+1)-f'(c_n)<0$,deci sirul e convergent.

2.a) Aria ceruta este $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$

b) $V=\pi\cdot\int_0^{\pi}f^2(x)dx=\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 xdx=\frac{\pi}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}.$

c) Limita ceruta se poate scrie astfel: $L=\lim\limits_{n\to\infty}2\sin^2\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k}{n}\right)$

Foloseste ca $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin a_n}{a_n}=1, a_n\to 0;$

$L=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}cox\frac{k}{n}=\frac{1}{2}\cdot\int_0^1\cos x\,dx=\frac{1}{2}\cdot\sin 1.$