

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție:

a) $I_1 = \frac{1}{2}$, $J_1 = \frac{1}{2}$, deci $(I_1 + J_1) = 1 \in \mathbb{Z}$

b) $a \cdot I_2 = \frac{a}{3}$, $J_2 = 2$ și astfel $a \cdot I_2 = J_2 \Rightarrow a = 6 \in \mathbb{Z}$

c) Pentru orice $x \in [0,1]$ avem $x^{n+1} \leq x^n \Rightarrow I_{n+1} \leq I_n$.Pe de altă parte $I_n = \frac{1}{n+1}$, $J_n = \frac{n^2}{2}$ și astfel

$$I_n = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} \leq \frac{n^2}{2} = J_n, \forall n \geq 1$$

d) Deoarece $I_n = \frac{1}{n+1}$, suma din enunț este egală cu $2 + 3 + 4 + \dots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$ și astfel

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = 14 \Rightarrow n = 4 \in \mathbb{N}$$

e) $J_n = \frac{n^2}{2}$ și astfel suma propusă este $\frac{n(n+1)}{4}$.Din $\frac{n(n+1)}{4} \leq 14 \Rightarrow n(n+1) \leq 7 \cdot 8$ deducem

numărul căutat : $n = 7$

f) $K_{2,1} = e^2 + 1$, $K_{1,2} = e - 2$, deci $K_{2,1} > K_{1,2}$.