Rezolvare.

a) $\det(A)=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{vmatrix}=1$, $\det(B)=\begin{vmatrix}0&a&3\\0&0&b\\0&0&0\end{vmatrix}=0\Rightarrow \det(A)+\det(B)=1$.

b) $A-I_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&3\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}\in M$, pentru $a=2,\ b=4$.

c) $B^2=\begin{pmatrix}0&a&3\\0&0&b\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&a&3\\0&0&b\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&ab\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow B^3=\begin{pmatrix}0&a&3\\0&0&b\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&ab\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O_3$.

d) aC inversa matricei $A\Leftrightarrow (aC)A=A(aC)=I_3$. Avem

$$CA=\begin{pmatrix}2&-4&10\\0&2&-8\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix},\quad AC=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-4&10\\0&2&-8\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$a\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow a=\frac{1}{2}.$$

e) Din c)$\Rightarrow$ există A^{-1} $\Rightarrow X=A^{-1}\begin{pmatrix}11\\10\\2\end{pmatrix}\Rightarrow X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&-4&10\\0&2&-8\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11\\10\\2\end{pmatrix}\Rightarrow\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$.

f) $B^2=O_3\Rightarrow\begin{pmatrix}0&0&ab\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow ab=0\Rightarrow a=0$ sau $b=0$, $a,b\in\{0,1,2\}\Rightarrow$

$$B\in\left\{\begin{pmatrix}0&0&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&3\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&3\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right\}.$$