Rezolvare:

1. Condiția: $x^2+1>0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$.

$\log_4\left(x^2+1\right)=0 \Leftrightarrow x^2+1=1 \Leftrightarrow x=0$ este soluția ecuației.

2. Relațiile lui Viète sunt: $x_1+x_2=\dfrac{2-m}{m-1}$; $x_1\cdot x_2=\dfrac{-m}{m-1}$;

Egalitatea din problemă devine $\dfrac{2-m}{m-1}-\dfrac{-m}{m-1}=2 \Leftrightarrow m=2\in\mathbb{Z}$.

3.

$A\left(\dfrac{m-1}{2},4\right)\in G_f \Rightarrow f\left(\dfrac{m-1}{2}\right)=4$; $\dfrac{m-1}{2}+m=4 \Leftrightarrow m=3$;.

4. Notăm: $m\left(\hat{A}\right)=A,\ m\left(\hat{B}\right)=B, m\left(\hat{C}\right)=C$, iar cu $a,\ b,\ c$ lungimile laturilor $BC,\ AC$, respectiv AB;

În $\triangle ABC\left(m\left(\sphericalangle A=90^\circ\right)\right)\Rightarrow \sin B=\dfrac{b}{a}$; $\sin C=\dfrac{c}{a}$; $\cos B=\dfrac{c}{a}$; $\cos C=\dfrac{b}{a}$;

$$(\sin B+\sin C)^2+(\cos B-\cos C)^2=\left(\frac{b+c}{a}\right)^2+\left(\frac{c-b}{a}\right)^2=\frac{2\left(b^2+c^2\right)}{a^2}=\frac{2a^2}{a^2}=2\in Z.$$

5. Punctul $M\in[AB]$, $[AM]\equiv[MB]$; Punctul $N\in[CD]$, $[CN]\equiv[ND]$;

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}$ (1); $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}$ (2); *Dar* $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$; $\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}$; (3)

Adunând relațiile 1,2,3 se obține: $2\cdot\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

6. Se amplifică fiecare fracție cu conjugata numitorului

$$\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{4-3}+...+\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{n-n+1}=3 \Leftrightarrow \sqrt{n}-1=3 \Leftrightarrow \sqrt{n}=4 \Leftrightarrow n=16.$$