

Rezolvare

1. a) $f'(x) = 1 - 3 \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, pentru orice $x > 0$.

b) $d: y - f(1) = f'(1)(x - 1)$, $d: y = 0$.

c) Din studiul semnului derivatei funcției f se obține că f este descrescătoare pe $(0, 1]$ și crescătoare pe $[1, +\infty)$ deci $f(x) \geq f(1) = 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$ de unde concluzia.

2. a) $\int (x+1)f(x)dx = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$.

b) $A(\Gamma_f) = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1} \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln(x+1) \right) \Big|_0^1 = \frac{5}{6} - \ln 2$.

c) Din $1 \leq (x+1)^2 \leq 4$ se obține $\frac{x^6}{4} \leq \frac{x^6}{(x+1)^2} \leq x^6$ pentru orice $x \in [0, 1]$ și atunci

$$V(C_f) = \pi \int_0^1 \frac{x^6}{(x+1)^2} dx \in \left[\frac{\pi}{28}, \frac{\pi}{7} \right].$$