Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a). Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$, astfel încât $x*(y*z)=(x*y)*z \Rightarrow ax+b(y*z)-1=a(x*y)+bz-1$.

$ax+aby+b^2z-b-1=a^2x+aby+bz-a-1, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

$$\left(a-a^2\right)x+\left(b^2-b\right)z-b+a=0, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} a-a^2=0 \\ b^2-b=0 \\ a-b=0 \end{cases} ; \ a=b=0 \text{ nu convine,}$$

deci $a=b=1$ care conduce la operația $x*y=x+y-1$.

b). Se demonstrează că $\forall x, y \in \mathbb{R}$ avem $x \circ y = y \circ x$.

$x \circ y = 2xy-2x-2y+3 = 2xy-2(x+y)+3 = 2yx-2(y+x)+3 = y \circ x$.

c). Se verifică existența elementului neutru pentru „$*$”.Din $x*e=x \Rightarrow x+e-1=x \Rightarrow e=1 \in \mathbb{R}$

Presupunem x' simetricul lui $x \Rightarrow x*x'=1 \Rightarrow x+x'-1=1 \Rightarrow \exists x'=2-x \in \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists x'=2-x \in \mathbb{R}$ simetricul lui x în raport cu legea „$*$”.

d). $\exists e \in \mathbb{R}$ a î $e \circ x = x \circ e = x \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

$e \circ x = x \Rightarrow 2ex-2e-2x+3=x \Rightarrow 2e(x-1)=3(x-1) \Rightarrow e=\frac{3}{2} \in \mathbb{R}, \ \ x \neq 1$ Se verifică existența lui $e=\frac{3}{2}$ și pentru $x=1$.

e). Se verifică prin calcul că $x \circ (y*z) = (x \circ y)*(x \circ z) = 2xy+2xz-4x-2y-2z+5$.

f). Lucrând ambii membrii se obține egalitatea cerută.

$f(xy)=\frac{1}{2}xy+1$

$f(x) \circ f(y) = \cdots = 2\left(\frac{1}{2}x+1\right)\left(\frac{1}{2}y+1\right)-2\left(\frac{1}{2}x+1\right)-2\left(\frac{1}{2}y+1\right)+3=\cdots=\frac{1}{2}xy+1$.