Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) $A^t = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$ şi obținem $B = \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 28 \\ 28 & 56 \end{pmatrix}$.

b) Se obține $\det(B) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 \geq 0$

c) Punctele P_1, P_2, P_3, O sunt coliniare $\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix} a_k & a_t \\ b_k & b_t \end{vmatrix} = 0$, $\forall\, k, t \in \{1, 2, 3\}$.

$\det(B) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} a_k & a_t \\ b_k & b_t \end{vmatrix} = 0$, $\forall\, t, k \in \{1, 2, 3\}$, $t \neq k$ şi rezultă concluzia.

2. a) Numărul elementelor mulțimii este $|\mathbb{Z}_5|^{|L|} = 5^2 = 25$, unde $L = \{a, b\} \subset \mathbb{Z}_5$.

b) Calcul direct.

c) Se verifică axiomele grupului. Pentru $a, b \in \mathbb{Z}_5$, notăm $A(a,b) = \begin{pmatrix} \hat{1} & a & b \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$.

Elementul neutru este $I_3 = A(\hat{0}, \hat{0})$, iar simetrica matricei $A(a,b)$ este matricea $A(-a, -b)$.