Rezolvare:

a. Matricea asociată sistemului $A=\begin{pmatrix}1 & -a & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 2a & 1 & 3\end{pmatrix}$,

$A^2=\begin{pmatrix}1 & -a & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 2a & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -a & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 2a & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a+1 & 2-2a & 8\\ 4 & 1-2a & 4\\ 8a+2 & 4-2a^2 & 4a+9\end{pmatrix}$

b. Pentru $a=0$ se va obține $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$, atunci $A^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 8\\ 4 & 1 & 4\\ 2 & 4 & 9\end{pmatrix}$ de unde se obține $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 12\\ 8 & 3 & 4\\ 2 & 6 & 15\end{pmatrix}$.

c. $A=\begin{pmatrix}1 & -a & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 2a & 1 & 3\end{pmatrix}$, de unde $\det A=3+4-4a+6a=2a+7$.

d. Prima ecuație a sistemului este $x-ay+2z=6$. Înlocuind $x=3$, $y=1$ şi respectiv $z=2$, se va obține ecuația având ca necunoscută pe a: $3-a+4=6\Leftrightarrow a=1$.

e. Sistemul (S) va avea soluție unică (este compatibil determinat) dacă şi numai dacă $\det A\neq 0$ Cum $\det A=2a+7$ se va obține relația $2a+7\neq 0\Leftrightarrow 2a\neq -7\Leftrightarrow a\neq -\frac{7}{2}$. Aşadar, sistemul va avea soluție unică pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{7}{2}\right\}$

f. Pentru $a=2$ sisemul devine (S): $\begin{cases}x-y+2z=6\\ 2x+y=7\\ 2x+y+3z=13\end{cases}$, matricea asociată $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ cu $\det A=9$.

În acest caz vom avea $\Delta_x=\begin{vmatrix}6 & -1 & 2\\ 7 & 1 & 0\\ 13 & 1 & 3\end{vmatrix}=18+14-26+21=27$, $\Delta_y=\begin{vmatrix}1 & 6 & 2\\ 2 & 7 & 0\\ 2 & 13 & 3\end{vmatrix}=21+52-28-36=9$,

$\Delta_z=\begin{vmatrix}1 & -1 & 6\\ 2 & 1 & 7\\ 2 & 1 & 13\end{vmatrix}=13+12-14-12-7+26=18$. Vom avea $x=\frac{\Delta_x}{\det A}=\frac{27}{9}=3$

$y=\frac{\Delta y}{\det A}=\frac{9}{9}=1$

$z=\frac{\Delta_z}{\det A}=\frac{18}{9}=2$

Atunci mulțimea soluțiilor sistemului (S) este $\{(3;1;2)\}$