Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) Calcul direct

b) $A^3 = 9A \Rightarrow I_3 + A^3 = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 9 \\ 9 & 10 & 9 \\ 9 & 9 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(I_3 + A^3\right) = 28.$

c) Fie $B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} a_1+b_1+c_1 & a_2+b_2+c_2 & a_3+b_3+c_3 \\ a_1+b_1+c_1 & a_2+b_2+c_2 & a_3+b_3+c_3 \\ a_1+b_1+c_1 & a_2+b_2+c_2 & a_3+b_3+c_3 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} a_1+a_2+a_3 & a_1+a_2+a_3 & a_1+a_2+a_3 \\ b_1+b_2+b_3 & b_1+b_2+b_3 & b_1+b_2+b_3 \\ c_1+c_2+c_3 & c_1+c_2+c_3 & c_1+c_2+c_3 \end{pmatrix}$. Egalând elementele aflate pe poziții corespondente, obținem concluzia.

2.a) $\hat{1} + \hat{2} + \ldots + \widehat{20} = \left(\hat{1} + \widehat{20}\right) + \left(\hat{2} + \widehat{19}\right) + \ldots + \left(\widehat{10} + \widehat{11}\right) = \hat{0}$.

b) $\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \ldots \cdot \widehat{20} = \hat{3} \cdot \hat{7} \cdot \left(\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \hat{4} \cdot \hat{5} \cdot \hat{6} \cdot \hat{8} \cdot \ldots \cdot \widehat{20}\right) = \hat{}$

c) $21 = 3 \cdot 7 \Rightarrow \varphi(21) = 21\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{7}\right) = 12$, deci numărul elementelor inversabile ale inelului $\mathbb{Z}_{21}$ este 12.

Numărul elementelor neinversabile din $\mathbb{Z}_{21}$ este $21 - 12 = 9$.