Soluție

1.a) $2A_2 = 2\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

b) $A_3 + xI_3 = \begin{pmatrix} 2+x & 1 & 1 \\ 1 & 2+x & 1 \\ 1 & 1 & 2+x \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(A + xI_3\right) = \left(x+4\right)\left(x+1\right)^2$

$\det\left(A + xI_3\right) = 0 \Rightarrow x \in \{-4, -1\}$

c) $\det A_4 = 5 \neq 0,$ deci A_4 este inversabilă. Fie $B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Prin calcul direct se arată că

$AB = BA = I_4,$ deci $B = A^{-1}$.

Calculul inversei matricei A_4 și obținerea formei cerută în enunț

2.a) $x_2 = 1 + i \Rightarrow x_3 = 1 - i$. Obținem $a = 4,\ b = 6,\ c = 4$

b) Presupunem că există $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel ca resturile împărțirii polinomul *f* la $(X-1)^2$ și $(X-2)^2$ sunt egale cu $r \in \mathbb{R}[X]$, $\operatorname{grad} r \leq 1$. Fie $g = f - r$; atunci $\operatorname{grad} g = 3$. Atunci $\left(X-1\right)^2 \mid g$ și $\left(X-2\right)^2 \mid g$

Rezultă $\left(X-1\right)^2\left(X-2\right)^2 \mid g \Rightarrow \operatorname{grad} g \geq 4$, contradicție

c) Presupunem că $x_1 \leq 0$. Pe rând, rezultă $x_1^3 \leq 0,\ -ax_1^2 \leq 0,\ bx_1 \leq 0,\ -c < 0$. Obținem $0 = f\left(x_1\right) < 0,$ contradicție