Soluție

1.a) Succesiv rezultă:

$$\lim_{x\nearrow 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\nearrow 1}\frac{\sqrt[3]{x^3-3x+2}}{x-1};\ \lim_{x\nearrow 1}\frac{\sqrt[3]{x^3-3x+2}}{x-1}=\lim_{x\nearrow 1}\sqrt[3]{\frac{x^3-3x+2}{(x-1)^3}};$$

$$\lim_{x\nearrow 1}\sqrt[3]{\frac{x^3-3x+2}{(x-1)^3}}=\sqrt[3]{\lim_{x\nearrow 1}\frac{x^3-3x+2}{(x-1)^3}}=\sqrt[3]{\lim_{x\nearrow 1}\frac{3x^2-3}{3(x-1)^2}}==\sqrt[3]{\lim_{x\nearrow 1}\frac{x+1}{x-1}}=-\infty.$$

b) Funcția *f* este derivabilă în orice punct *x* care satisface condiția $x^3-3x+2\neq 0$. Deci domeniul de derivabilitate al funcției *f* este $\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$.

c) Aplicând corect reguli de derivare, rezultă $f'(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}}$.

Tabelul de variație al funcției *f* este:

x	$-\infty$		-2		-1		1		∞
$f'(x)$		+++++	|	+++++	0	- - - - - -	|	++++++	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞

Din tabelul de variație al funcției rezultă că –1 şi 1 sunt punctele de extrem ale funcției *f*.

2. a) Descompunem în fracții simple : $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{x+2}$.

Rezultă $1=A(x+1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x+1)$ sau $(A+B+C)x^2+(3A+2B+C)x+2A=1$.

Astfel avem sistemul $A+B+C=0, 3A+2B+C=0, 2A=1$ care are soluția $A=\dfrac{1}{2}, B=-1, C=\dfrac{1}{2}$.

Atunci: $f(x)=\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{2(x+2)}$. Primitiva se găseşte imediat:

$$\int f(x)dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{1}{x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+2}dx=\ln\frac{\sqrt{x(x+2)}}{x+1}+C.$$

b) Deoarece $t\in(1,\infty)$ rezultă $t>1, t+1>2, t+2>3\Rightarrow t(t+1)(t+2)>6\Rightarrow\dfrac{1}{t(t+1)(t+2)}<\dfrac{1}{6}$.

Atunci, pentru $x>1$ rezultă $\displaystyle\int_1^x\frac{1}{t(t+1)(t+2)}dt<\int_1^x\frac{1}{6}dt=\frac{x-1}{6}$.

Egalitatea are loc dacă $x=1$.

c) Utilizăm schimbarea de variabilă: $x^3=t$. Rezultă $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{1+x^6}dx=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{3x^2}{1+x^6}dx=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dx$.

Dar $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dx=arctgt\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$. Rezultă $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{1+x^6}dx=\frac{\pi}{12}$.