Rezolvare:

a. $AB=\begin{pmatrix}2a & 1\\ b & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a & 2a^2+1\\ b & ab+3\end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2a & 1\\ b & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a+ab & 1+3a\\ b & 3\end{pmatrix}$.

Atunci $M=AB+BA=\begin{pmatrix}4a+ab & 2a^2+3a+2\\ 2b & ab+6\end{pmatrix}$.

b. Pentru $a=2$ matricea A devine $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ b & 3\end{pmatrix}$, atunci $\det A=12-b$ de unde se obține ecuația $12-b=5\Leftrightarrow b=7$.

c. Pentru $b=1$ matricea A devine $A=\begin{pmatrix}2a & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, A inversabilă dacă şi numai dacă $\det A\neq 0$, obținem

$6a-1\neq 0\Leftrightarrow a\neq \frac{1}{6}$.

În acest caz, pentru $b=1$ matricea A este inversabilă pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{6}\right\}$.

d. $A=\begin{pmatrix}2a & 1\\ b & 3\end{pmatrix}$, $\det A=6a-b$ şi cum $b\neq 6a$ matricea A este inversabilă. Calculăm matricea adjunctă

$A^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -b & 2a\end{pmatrix}$, atunci $A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^*=\frac{1}{6a-b}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -b & 2a\end{pmatrix}$.

e. Pentru $a=0$ şi $b=1$, matricele A şi B devin $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\det A=-1$ şi $\det B=1$, deci ambele matrice sunt inversabile, $A^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B^{-1}=B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. În acest caz soluția ecuației matriceale va fi $X=A^{-1}CB^{-1}$, de unde prin calcul se obține $X=\begin{pmatrix}-8 & -2\\ 3 & 2\end{pmatrix}$.

f. Conform rezultatului obținut la punctul a. vom avea $AB=\begin{pmatrix}2a & 2a^2+1\\ b & ab+3\end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix}2a+ab & 1+3a\\ b & 3\end{pmatrix}$.

Identificând elementele din egalitatea $AB=BA$ se obțin relațiile

$ab=0$ şi $2a^2+1=1+3a\Leftrightarrow 2a^2-3a=0\Leftrightarrow a(2a-3)=0\Leftrightarrow a_1=0, a_2=\frac{3}{2}$.

Deci, perechile de numere reale căutate sunt: $(0;0)$ şi $\left(\frac{3}{2};0\right)$