

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

a) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

b) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \infty$, $x = 0$ asimptotă verticală la dreapta;

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$, $y = 1$ asimptotă orizontală, 2 asimptote.

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1}{x^2} = 2$.

d) $\frac{f(\sqrt{2}) - f(1)}{\sqrt{2} - 1} = -\frac{1}{c^2}, c^2 = \sqrt{2}, c = \sqrt{\sqrt{2}} \in (1, \sqrt{2})$

e) Fie $h: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = f'(x)$.

$h'(x) = \frac{2}{x^3} > 0, \forall x > 0$, deci h strict crescătoare.

f) $f(x) = 1 + \frac{1}{x}, f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 1 + \frac{2}{a+b}, \frac{f(a) + f(b)}{2} = 1 + \frac{a+b}{2ab}$

$$\frac{2}{a+b} \leq \frac{a+b}{2ab} \Leftrightarrow 4ab \leq (a+b)^2; a, b > 0 \Leftrightarrow 0 \leq (a-b)^2$$