

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

a) În punctul $x_0 = -1$ problema limitei are sens ($x_0 = -1$ este punct de acumulare). Se obține $g(-1+0) = +\infty$, $g(-1-0) = -\infty$. Funcția nu are limită deoarece $g(-1+0) \neq g(-1-0)$

b) Se obține $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{(x+1)^2} = 0$, $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} = -\infty$,






$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x+1} = 0$. Funcțiile au asimptotă verticală $x = -1$ și asimptotă orizontală $y = 0$.

c) Caz de nedeterminare $\frac{0}{0}$. Se obține $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{g(x)-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1-(x+1)^2}{1-(x+1)} \cdot \frac{1}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2-2x}{-x} = 2$.

d) Funcția g este derivabilă și $g'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$. Verificarea este imediată.

e) Se obține că $h(-1-0) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = +\infty$ și $h(-1+0) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} g(x) = +\infty$. Funcția are limită în $x_0 = -1$.

f) Se obține $h_1(x) = -\frac{x}{(x+1)^2}$, $h_1'(x) = \frac{x-1}{(x+1)^3}$, $x \in (-1, \infty)$. Tabelul de monotonie este:

x	-1	1	$+\infty$
$h_1'(x)$	- - - - -	0	+ + + + +
$h_1(x)$	    	m	