Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) $\det A = -1$.

b) Prin calcul direct rezultă $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Fie $B = I_3 + A$; rezultă $B^2 = 2B$. Prin inducție rezultă imediat că $B^n = 2^{n-1} B$.

2.a) Restul împărțirii polinomului f_1 la polinomul $X-2$ este $f_1(2) = 7 \neq 0$, deci $X-2$ nu divide f

b) Fie g câtul împărțirii lui f_3 la $X-1$; suma coeficienților polinomului g este $g(1)$

Avem $f_3(1) = -2 \Rightarrow f_3 = (X-1)g - 2 \Rightarrow f_3 + 2 = (X-1)g$

Dar $f_3 + 2 = X^9 - 1 + \left(2X^2 - 4X + 2\right) = (X-1)\left(X^8 + X^7 + ... + X + 1\right) + 2(X-1)^2$, deci

$g = X^8 + X^7 + ... + X + 1 + 2(X-1) \Rightarrow g(1) = 9$.

Alternativ: Fie g câtul împărțirii lui f_3 la $X-1$; suma coeficienților lui g este $g(1)$

Avem $f_3 = (X-1)g - 2 \Rightarrow f' = (X-1)g' + g$, deci $f'(1) = g(1) \Rightarrow g(1) = 9$

c) Aplicând teorema împărțirii cu rest, rezultă $f_n = \left(X^2 + X + 1\right)q + r,\ r = aX + b \in \mathbb{R}[X]$

Fie ε o rădăcină a polinomului $h = X^2 + X + 1$; atunci $\varepsilon^3 = 1,\ \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$

Însă $f(\varepsilon) = \varepsilon^{3n} + 2\varepsilon^2 - 4\varepsilon + 1 = -6\varepsilon$ și $f(\varepsilon) = a\varepsilon + b$, deci $a = -6, b = 0 \Rightarrow r = -6X$.