SOLUȚIE:

a) f este continuă pe $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă este continuă în $x=0$.

f este continuă în $x=0$ dacă şi numai dacă $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=f(0)\Leftrightarrow a=e^0\Rightarrow a=1$.

b) Pentru $a=1$, $f(x)=\begin{cases} e^x & , x<0 \\ x^2+x+1 & , x\ge 0 \end{cases}$ şi $f'(x)=e^x \ \forall x<0$.

Cum $f'(x)\ge 0, \forall x<0 \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(-\infty,0)$

c) $f(x)=7\Leftrightarrow\left(e^x=7\wedge x<0\right)\vee\left(x^2+x+1=7\wedge x\ge 0\right)\Rightarrow x=2$

În intervalul $(0,\infty)$ ecuația nu are soluții.

d) $\frac{1}{e^2}<\frac{1}{3}<\frac{1}{e}\Leftrightarrow e^{-2}<\frac{1}{3}<e^{-1}\Leftrightarrow f(-2)<\frac{1}{3}<f(-1)$.

f este strict crescătoare $\Rightarrow(m,m+1)=(-2,-1)\Rightarrow m=-2$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0\Rightarrow y=0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$.

Se demonstrează uşor că aceasta este singura asimptotă.

f) $g'(x)=e^x\left(\frac{x^2+x+1}{x}+\ln x\right),\forall x\in>0$. Pentru $a=1$ obținem $f(0)=1$ şi $g'\big(f(0)\big)=g'(1)=3e$.