Rezolvare

1) **a)** $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x-\frac{3}{2}} + \frac{1}{x+\frac{1}{2}} > 0,\ \forall x > 0.$

b) Ce arată că $\lim_{x\to\infty} f(x) < 0$ şi cum f este strict crescătoare, rezultă că $f(x) < 0,\ \forall x > 0.$

c) $a_{n+1} - a_n = f(n)$ şi conform (**b**) $\Rightarrow (a_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător.

2) **a)** $f_3'(x) = x^3 \arcsin x.$

b) $f_1\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} t\cdot \arcsin t = \frac{t^2}{2}\cdot \arcsin t\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{\pi}{28} + \int_0^1 \frac{1-t^2-1}{\sqrt{1-t^2}}dt =$

$= \frac{\pi}{48} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-t^2}\,dt - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{48} + \frac{\sqrt{3}}{16} - \frac{\pi}{24} = \frac{\sqrt{3}}{16} - \frac{\pi}{48}.$

c) $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \int_0^x t^2\cdot \arcsin t\, dt = \int_0^{1-\varepsilon} t^2 \cdot \arcsin t\, dt.$