

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare.

$$\text{a)} \quad A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b)} \quad \det(2A) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 8 + 8 = 16.$$

$$\text{c)} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow xI_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 2.$$

$$\text{d)} \quad \left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I_3\right)A = \frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{2}A \stackrel{\circ)}{=} \frac{1}{2}(A + 2I_3) - \frac{1}{2}A = I_3, \quad A\left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I_3\right)A = I_3.$$

$$\text{e)} \quad X = A^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}. \text{ Din d)} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{f)} \quad A + xI_3 = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A + xI_3) = x^3 + 2 - 3x \Rightarrow x^3 + 2 - 3x = x^3 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}.$$