

Soluție

1.a) f este continuă pe $(0,1]$ deoarece, pe acest interval, se obține prin operații cu funcții continue. Cum

$\left| x \sin \frac{\pi}{x} \right| \leq |x|$ și $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$, rezultă $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{\pi}{x} = 0$. Deci $\lim_{x \searrow 0} f(x) = 0 = f(0)$. Prin urmare f este continuă și în 0. Rezultă că f este continuă pe $[0,1]$.

b) f este derivabilă pe $(0,1]$ deoarece, pe acest interval, se obține prin operații cu funcții derivabile.

Întrucât limita $\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \sin \frac{\pi}{x}$ nu există, f nu este derivabilă în 0.

c) $f'(x) = \sin \frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{x} \cos \frac{\pi}{x}, \forall x \in (0,1]$

Avem $f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} \sin((n+1)\pi) = 0$ și $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \sin n\pi = 0$.

Conform teoremei lui Rolle, există un punct $c \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ astfel încât $f'(c) = 0$, echivalent

$$\sin \frac{\pi}{c} - \frac{\pi}{c} \cos \frac{\pi}{c} = 0 \Leftrightarrow c \sin \frac{\pi}{c} = \pi \cos \frac{\pi}{c}$$

Rezultă $f(c) = \pi \cos \frac{\pi}{c}$. Prin urmare, c este o soluție a ecuației $f(x) = \pi \cos \frac{\pi}{x}$. și $c \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$.

2.a) Avem $\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx = \int_0^1 \ln(1+x) dx$. Dar:

$$\int_0^1 \ln(1+x) dx = \int_0^1 x' \ln(1+x) dx = x \ln(1+x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx = \ln 2 - \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx.$$
 Cum

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x} dx = 1 - \ln 2 \text{ rezultă } \int_0^1 f(\sqrt{x}) dx = 2 \ln 2 - 1.$$

b) $\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 x \arctg x dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}\right)' \arctg x dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx$. Dar $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = 1 - \arctg x \Big|_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}$.

Rezultă $\int_0^1 g(x) dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

c) Considerăm funcția $\varphi = f - g$. Atunci: $\varphi'(x) = \frac{x}{1+x^2} - \arctg x$ și $\varphi''(x) = -\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$.

Deoarece $\varphi''(x) \leq 0$, rezultă φ' este descrescătoare și $x \geq 0 \Rightarrow \varphi'(x) \leq \varphi'(0) \Rightarrow \varphi'(x) \leq 0$.

Prin urmare φ este descrescătoare și $x \geq 0 \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(0) \Rightarrow \varphi(x) \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq g(x)$.

Ca atare aria căutată este $A = \int_0^1 (g(x) - f(x)) dx = -\frac{\pi}{4} - \ln 2 + \frac{3}{2}$.

