Soluție

a) Prin calcul direct rezultă $f(x)-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-3}=0,\forall x\in\mathbb{R}-\{1,3\}$

b) $f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-3)^2}=\frac{-2x^2+8x-10}{(x-1)^2(x-3)^2},\forall x\in\mathbb{R}-\{1,3\}$

c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0\Rightarrow y=0$ asimptotă orizontală spre $\pm\infty$

$\Rightarrow$ graficul funcției nu are asimptotă oblică

$l_s(1)=\lim\limits_{x\nearrow 1} f(x)=-\infty$

$l_d(1)=\lim\limits_{x\searrow 1} f(x)=\infty\Rightarrow x=1$ asimptotă verticală

$l_s(3)=\lim\limits_{x\nearrow 3} f(x)=-\infty$

$l_d(3)=\lim\limits_{x\searrow 3} f(x)=\infty\Rightarrow x=3$ asimptotă verticală

d) $f'(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ strict descrescătoare $\forall x\in(3,+\infty)$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(\frac{1}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{x+1}{x}-\frac{x+1}{3x+2}\right)=-1-\frac{1}{3}=-\frac{4}{3}$

f) $g'(x)=\left(x^2+3x+a+1\right)e^x$

g crescătoare pe $\mathbb{R}$ $\Rightarrow g'(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow x^2+3x+a+1\geq 0\Rightarrow\Delta\leq 0$

$\Rightarrow 5-4a\leq 0\Rightarrow a\geq\frac{5}{4}\Rightarrow a\in\left[\frac{5}{4},+\infty\right)$