Soluție

1. a) Calcul direct.

b) Se demonstrează prin inducție după $n \in \mathbb{N}^*$.

c) $A^2 = -I_2$, deci $A^{2008} = I_2$.

2. a) Folosind relațiile lui Viète, se obține $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = a$.

b) Din teorema împărțirii cu rest, $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi $q \in \mathbb{R}[X]$, $f = (X-1)^2 \cdot q + \alpha X + \beta$.

Din $\begin{cases} f(1) = \alpha + \beta \\ f'(1) = \alpha \end{cases}$, se obține $\begin{cases} \alpha = a + 8 \\ \beta = -7 \end{cases}$. Restul împărțirii este: $r = (a+8)X - 7$.

c) $\sum_{k=1}^{4} x_k^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{2}{9} < 0$, deci ecuația nu are toate rădăcinile reale

Funcția polinomială asociată (notată tot cu f) fiind continuă, $f(0) = -1$ și $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$, f are cel puțin o rădăcină reală. f are un număr par de rădăcini în $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, deci are exact două rădăcini reale.