

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SOLUȚIE:

a) $x^2 - 2x \neq 0 \Rightarrow x(x-2) \neq 0 \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$

b) $f'(x) = \left(\frac{x-1}{x^2-2x} \right)' = \frac{x^2-2x-(2x-2)(x-1)}{(x^2-2x)^2} = \frac{-x^2+2x-2}{(x^2-2x)^2}$

c) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x-1}{x^2-2x} = \frac{-1}{0_+} = -\infty$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x-1}{x^2-2x} = \frac{-1}{0_-} = +\infty$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x-1}{x^2-2x} = \frac{1}{0_-} = -\infty$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{x-1}{x^2-2x} = \frac{1}{0_+} = +\infty \Rightarrow x=0$ și $x=2$ sunt

asimptote verticale

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x-1)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)}{(x-2)} = 1$

e) $f_1(x) = \frac{x-1}{x-2}$. Atunci, $f_1'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} < 0, \forall x \in (2, 7] \Rightarrow f_1$ este strict descrescătoare pe $(2, 7]$

valoarea minimă a funcției f_1 este $f_1(7) = \frac{6}{5}$.

f) Din subpunctul e), funcția f_1 are valoarea minimă $f_1(7) = \frac{6}{5}$;

$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f_1(x) = +\infty$, f_1 continuă și descrescătoare pe $(2, 7] \Rightarrow f_1((2, 7]) = \left[\frac{6}{5}, \infty \right)$.