Soluție:

a) O primitivă este de forma $F(x)=x^2-\frac{x^3}{3}+k$. Deoarece $F(1)=1-\frac{1}{3}+k\in\mathbb{Z}$, e suficient să alegem $k=\frac{1}{3}$ (sau $k=\frac{7}{3}$, etc.). şi avem , de exemplu , $F(x)=x^2-\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}$

b) $\int_{-1}^{1} f(x)dx=\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1}$,deci $\int_{-1}^{1} f(x)dx=-\frac{2}{3}$

c) $\int_3^4 \frac{x-2}{f(x)}dx=-\int_3^4 \frac{1}{x}dx$, $\int_3^4 \frac{x-2}{f(x)}dx=-\ln 4+\ln 3=\ln\frac{3}{4}$. Aşadar există $q=\frac{3}{4}\in(0,1)$

d) $\int_3^n \frac{f(x)}{2-x}dx=\frac{x^2}{2}\Big|_3^n$ şi $\frac{n^2-9}{2}=20\Rightarrow n=7$

e) $0<\mathcal{A}(\mathcal{S})=\int_0^2\left(2x-x^2\right)dx=\frac{4}{3}$; există $1\in\mathbb{Z},1\in\left(0,\frac{4}{3}\right)$, iar graficul este o parabolă cu vârful $V(1,1)$ şi intersecțiile cu Ox sunt $A(0,0),B(2,0)$. Triunghiul VAB are aria egală cu 1 şi este înscris în suprafața S

f) Pentru orice $x\in[0,1]$ avem $1\le e^x\le e$, $0\le f(x)\le 1$ $\Rightarrow e^x\cdot f(x)\le e$. Integrând inegalitatea obținută anterior ajungem la $\int_0^1 e^x\cdot f(x)dx\le e$