

**Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

Rezolvare

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{(x+2)(y+2) - (x-2)(y-2)}{(x+2)(y+2) + (x-2)(y-2)} = \frac{xy + 2x + 2y + 4 - xy + 2x + 2y - 4}{xy + 2x + 2y + 4 + xy - 2x - 2y + 4} = \frac{4x + 4y}{2xy + 8} = \frac{2x + 2y}{xy + 4} = \\ & = \frac{2(x+y)}{4\left(1 + \frac{xy}{4}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x+y}{1 + \frac{xy}{4}} = \frac{1}{2}(x * y), \forall x, y \in G. \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad x * (-x) = \frac{4x - 4x}{4 - x^2} = 0 \in G, \forall x \in G$$

$$\text{c)} \quad x * e = x, (\forall) x \in (-2, 2) \Leftrightarrow e = 0.$$

$$\text{d)} \quad (x * y) * z = 4 \frac{(x+2)(y+2)(z+2) - (x-2)(y-2)(z-2)}{(x+2)(y+2)(z+2) + (x-2)(y-2)(z-2)} = x * (y * z), \forall x, y, z \in G.$$

$$\text{e)} \quad \text{Fie } x \in G. \text{ Caut } x' \in G \text{ astfel ca } x * x' = x' * x = 0. \text{ Dar } x * x' = \frac{x + x'}{1 + \frac{xx'}{4}} \Rightarrow x' = -x \in G.$$

f) Se demonstrează ușor că  $x * y = y * x, \forall x, y \in G$ . Deci „ $*$ ” este asociativă și comutativă pe  $G$  și  $x * (-x) = 0, \forall x \in G$ .  $x * 0 = 0 * x = x, \forall x \in G$ .

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{8}\right) * \left(\frac{1}{7}\right) * \dots * 1 * (-1) * \left(\frac{-1}{2}\right) * \dots * \left(-\frac{1}{7}\right) * \left(-\frac{1}{8}\right) = \\ & = \underbrace{\left[\left(\frac{1}{8}\right) * \left(\frac{-1}{8}\right)\right]}_0 * \underbrace{\left[\left(\frac{1}{7}\right) * \left(\frac{-1}{7}\right)\right]}_0 * \dots * \underbrace{[1 * (-1)]}_0 = 0 \end{aligned}$$