Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

a) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{x+a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2}{(x+1)\cdot(x+a)}=\frac{a}{2(a+1)}$. Din egalitatea $\frac{a}{2(a+1)}=\frac{1}{3}$ se obține $a=2$.

b) Funcția este derivabilă și $f'(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$.

c) Se obține ecuația $\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}=\frac{3}{4}$ sau $x^2+2x-3=0$ cu soluțiile $x\in\{1,-3\}$.

d) $1-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-1}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x+1-1}{(x+1)^2}=f'(x)$

e) Ecuația $f'(x)=0$ are soluțiile $x\in\{-2,0\}$. Tabelul de monotonie este

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$	0	$+\ +\ +\ +\ +\ +\ +$
$f(x)$	$\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow$	m	$\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow$

f) Se obține $f'(2^n-1)=1-\frac{1}{(2^n-1+1)^2}=1-\frac{1}{4^n}$, pentru $1\le n\le 10$. Rezultă că :

$$S=1-\frac{1}{4^1}+1-\frac{1}{4^2}+1-\frac{1}{4^3}+...+1-\frac{1}{4^{10}}=10-s\text{, unde } s=\frac{1}{4^1}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}...+\frac{1}{4^{10}}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1-\frac{1}{4^{10}}}{1-\frac{1}{4}}\right)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^{10}}\right)$$