

Rezolvare:

$$a. A = M - 3a \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - 3a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3a & 1 \\ -1 & -1-3a \end{pmatrix}$$

$$b. A = \begin{pmatrix} 1-3a & 1 \\ -1 & -1-3a \end{pmatrix}, \text{ atunci } \det A = -(1-3a)(1+3a) + 1 = -1 + 9a^2 + 1 = 9a^2 \text{ de unde se obține}$$

$$\text{ecuația } 9a^2 = 36 \Leftrightarrow a_1 = -2, a_2 = 2.$$

$$c. A = \begin{pmatrix} 1-3a & 1 \\ -1 & -1-3a \end{pmatrix}, \det A = 9a^2 \text{ și cum } a \neq 0 \text{ matricea } A \text{ este inversabilă. Calculăm matricea}$$

$$\text{adjunctă } A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-3a & -1 \\ 1 & 1-3a \end{pmatrix}, \text{ atunci } A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \frac{1}{9a^2} \begin{pmatrix} -1-3a & -1 \\ 1 & 1-3a \end{pmatrix}.$$

$$d. \text{ Pentru } a = \frac{1}{3} \text{ matricea devine } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \det A = 1 \neq 0, A \text{ este inversabilă și vom obține}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ În acest caz soluția ecuației matriceale va fi } X = A^{-1}M, \text{ de unde prin calcul se obține}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e. A = \begin{pmatrix} 1-3a & 1 \\ -1 & -1-3a \end{pmatrix}, \text{ de unde } \operatorname{Tr}(A) = 1-3a-1-3a = -6a \text{ și } \det A = 9a^2. \text{ Calculăm}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1-3a & 1 \\ -1 & -1-3a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-3a & 1 \\ -1 & -1-3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9a^2-6a & -6a \\ 6a & 9a^2+6a \end{pmatrix}, \text{ calculăm}$$

$$\operatorname{Tr}(A) \cdot A - \det A \cdot I_2 = -6a \begin{pmatrix} 1-3a & 1 \\ -1 & -1-3a \end{pmatrix} - 9a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9a^2-6a & -6a \\ 6a & 9a^2+6a \end{pmatrix}, \text{ de unde se va obține}$$

$$\text{identitatea } A^2 = \operatorname{Tr}(A) \cdot A - \det A \cdot I_2.$$

$$f. A^3 = a^2(3M + aI_2). \text{ Din enunț se cunoaște că } A = M + aI_2, \text{ de unde } A^3 = (M + aI_2)^3. \text{ Folosind}$$

proprietatea de comutativitate a înmulțirii matricei unitate cu o altă matrice și proprietățile înmulțirii matricelor cu scalari, se va obține:  $A^3 = M^3 + 3a \cdot M^2 + 3a^2 \cdot M + a^3 \cdot I_2$ . Calculăm

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ de unde } M^3 = M^2 \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ și înlocuind în relația anterioară,}$$

$$\text{se va obține: } A^3 = 3a^2 \cdot M + a^3 \cdot I_2 = a^2(3 \cdot M + a \cdot I_2). \text{ **Asadar, } A^3 - a^2(3M + aI_2) = O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}**}$$