Soluție

a). $x \perp y = xy - x - y + 3 = xy - x - y + 1 + 2$. Se grupează termenii în mod corespunzător şi se obține
$x \perp y = (x-1)(y-1) + 2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

b). Pentru $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ se demonstrează că $x \perp (y \perp z) \neq (x \perp y) \perp z$.
$x \perp (y \perp z) = x(y \perp z) - x - (y \perp z) + 3 = \cdots = xyz - (xy + xz + yz) + 2x + y + z$.
$(x \perp y) \perp z = (x \perp y)z - (x \perp y) - z + 3 = \cdots = xyz - (xz + yz + xy) + x + y + 2z$.
Se observă că rezultatele sunt diferite.

c). $\begin{cases} x \perp x = y \\ x \perp y = xy - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - y = -3 \\ x + y = 5 \end{cases}$. Se aplică metoda substituției $y = 5 - x$, se rezolvă ecuația
$y^2 - 9y + 18 = 0$; $\Delta = 9 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 6 \Rightarrow x_1 = -1 \\ y_2 = 3 \Rightarrow x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow S = \{(-1, 6); (2, 3)\}$.

d). $[(2 \perp x) \perp 2] \perp x = 10 \Rightarrow [(2x - 2 - x + 3) \perp 2] \perp x = 10$. Se aplică din nou legea de compoziție şi rezultă ecuația $x^2 + 1 = 10 \Rightarrow x^2 = 9$ care rezolvată conduce la soluțiile $x_1 = 3$ şi $x_2 = -3$.

e). $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \perp x \geq 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 \geq 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Rightarrow (x-1)^2 \geq 0$ adevărat $\forall x \in \mathbb{R}$.

f). Trebuie pusă condiția ca numerele $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ să fie opuse pentru ca $a \perp b \in \mathbb{Q}$.
Fie $a = \sqrt{5}$ şi $b = -\sqrt{5}$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ atunci
$a \perp b = \sqrt{5} \perp (-\sqrt{5}) = \sqrt{5} \cdot (-\sqrt{5}) - \sqrt{5} + \sqrt{5} + 3 = (-5) + 3 = -2 \in \mathbb{Q}$.

SAU

Alegem $a = \sqrt{3}$ şi din condiția $a \perp b = 0 (\in \mathbb{Q})$ se determină $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.