Soluție:

1. **a)** Se arată că $A^4 = -4 \cdot I_2$.

b) Se demonstrează prin calcul direct.

c) Se demonstrează că

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\quad A^{4k} = (-4)^k \cdot I_2,\quad A^{4k+1} = (-4)^k \cdot A,\quad A^{4k+2} = (-4)^k \cdot A^2 \text{ și } A^{4k+3} = (-4)^k \cdot A^3.$$

Folosind punctul b) și forma matricelor A, A^2, A^3, deducem concluzia.

2. **a)** Pentru $x \in \mathbb{C}$, notăm $x^2 = t$. Ecuația $2t^2 + 3t - 5 = 0$ are soluțiile $t_1 = 1$ și $t_2 = -\frac{5}{2}$.

Rădăcinile polinomului f sunt $x_{1,2} = \pm 1$ și $x_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot i$.

b) Concluzia rezultă folosind relațiile lui Viète și faptul că suma căutată este egală cu

$$S = 3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 8(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4).$$

c) Dacă $a = 4$, atunci, din **b)** obținem că rădăcinile lui f sunt egale. Folosind prima relație a lui Viète, deducem că $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = -\frac{1}{2}$. Găsim apoi $b = 1$ și $c = \frac{1}{8}$.