

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

1.a. $f'(x) = \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}.$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x(1-x)} = 0 \Rightarrow y=0$ ecuația asimptotei orizontale la $+\infty$.

c. Din $f'(x) = \frac{xe^x}{(1+x)^2}$, $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, punct de minim și $f(x) \geq f(0) \Rightarrow 1 \leq f(x), \forall x > -1$,

2.a. $I_0 = \int_e^{e^2} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_e^{e^2} = 1$

b. $I_1 = \int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx = \frac{\ln^2 x}{2} \Big|_e^{e^2} = \frac{3}{2}.$

c. $1 \leq \ln^n x \leq 2^n \Rightarrow \int_e^{e^2} \frac{1}{x} dx \leq \int_e^{e^2} \frac{\ln^n x}{x} dx \leq \int_e^{e^2} \frac{2^n}{x} dx$. Dar, $I_n = \frac{\ln^n x}{n+1} \Big|_e^{e^2} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$ și $\int_e^{e^2} \frac{1}{x} dx = 1 \Rightarrow$ relația cerută