Rezolvare

a) Se arată că $\exists e\in\mathbb{Z}$ astfel încât $x*e=e*x=x, \forall x\in\mathbb{Z}$

Existența elementului e se determină din $x*e=x$, $\forall x\in\mathbb{Z}$ de unde se obține $e=2$

Apartenența lui e la $\mathbb{Z}$ este evidentă: $2\in\mathbb{Z}$

Se demonstrează că legea $*$ este comutativă pe $\mathbb{Z}$ adică $x*y=y*x, \forall x,y\in\mathbb{Z}$.

Deci $\exists e=2\in\mathbb{Z}$ a.î. $x*e=e*x=x$.

b) Se demonstrează că $\forall x,y,z\in\mathbb{Z}$ $(x*y)*z=x*(y*z)=x+y+z-4$

c) Ca şi la punctul a) se determină elementul neutru $e=3$

Fie $x\in\mathbb{Z}$, x este simetrizabil $\Leftrightarrow$ $\exists x'\in\mathbb{Z}$ a.î. $x\circ x'=x'\circ x=3$

Din $x\circ x'=3$ obținem $x'=\dfrac{2x-3}{x-2}\in\mathbb{Z}$ doar pentru $x\in\{1,3\}$

Deci doar elementele din mulțimea $\{1,3\}$ sunt simetrizabile.

d) Fie $x=2k+1$, $y=2p+1$, $k,p\in\mathbb{Z}$,

$x\circ y=(2k+1)(2p+1)-2(2k+1)-2(2p+1)+6=2(2kp-k-p+1)+1\in H$, $2kp-k-p+1\in\mathbb{Z}$

e) Se arată prin calcul că

$(x*y)\circ z=(x+y-2)\circ z=(x+y-2)\cdot z-2(x+y-2)-2z+6=xz+yz-2x-2y-4z+10$

$(x\circ z)*(y\circ z)=(xz-2x-2z+6)*(yz-2y-2z+6)=xz+yz-2x-2y-4z+10$

f) Se arată că legea „$*$” este asociativă (din b)), comutativă (prin calcul direct din a)), că admite element neutru (din a)) şi că orice element este simetrizabil în raport cu legea $*$.

Se arată că legea „$\circ$” este asociativă (prin calcul direct), că admite element neutru (din c)).

Se arată că legea „$\circ$” este distributivă față de legea „$*$” (din e)).

Deci $(\mathbb{Z},*,\circ)$ este inel.