Soluție

1.a) Explicitând modulul, rezultă $f(x)=\begin{cases}1-\sqrt{x^2-1}, x\in(-\infty,1]\cup[1,\infty)\\ 1-\sqrt{1-x^2}, x\in(-1,1)\end{cases}$, de unde rezultă

$f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}, \forall x\in(-1,1)$.

b) Ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției *f* este $y=mx+n$, unde $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ și

$n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)$. Deci :

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)=-1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-1}+1\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}+1\right)=1.$$

Prin urmare, ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției *f* este $y=-x+1$.

c) Pentru $x\in[1,\infty)$ rezultă $1-x^2\le 0$, deci $1-x^2\le\sqrt{\left|1-x^2\right|}$. Prin urmare

$0\le\dfrac{1-\sqrt{\left|1-x^2\right|}}{x^2}\le 1, \forall x\in\left(\sqrt{2},\infty\right)$. Deci $-1\le g(x)\le 1, \forall x\in\left(\sqrt{2},\infty\right)$

Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}=\dfrac{1}{2}$, funcția *g* poate fi

prelungită prin continuitate în 0 punând $g(0)=\dfrac{1}{2}$.

Cum *g* este continuă pe intervalul $\left[0,\sqrt{2}\right]$, rezultă că pe acest interval *g* este

mărginită, adică există $M>0$ astfel încât $\left|g(x)\right|\le M, \forall x\in\left[0,\sqrt{2}\right]$.

Cum $\left|g(x)\right|\le 1, \forall x\in\left(\sqrt{2},\infty\right)$ rezultă $\left|g(x)\right|\le\max\{1,M\}, \forall x\in[0,\infty)$.

Aceasta probează că *g* este mărginită.

2.a) $\int_0^{3/4}\dfrac{2t+1}{f(\sqrt{t})}dt=\int_0^{3/4}\dfrac{2t+1}{1-\sqrt{1-t}}dt$. Utilizăm schimbarea de variabilă $\sqrt{1-t}=u\Leftrightarrow t=1-u^2, \forall t\in[0,1]$.

Deci $\int_0^{3/4}\dfrac{2t+1}{f(\sqrt{t})}dt=\int_0^{3/4}\dfrac{2t+1}{1-\sqrt{1-t}}dt=-\int_1^{1/2}\dfrac{3-u^2}{1-u}\cdot 2u\,du=2\int_0^{1/2}\dfrac{3u-u^3}{1-u}\cdot du=$

$$=2\int_0^{1/2}\frac{3u-u^3}{1-u}\cdot du=2\int_0^{1/2}\left(u^2+u-2-\frac{2}{u-1}\right)du=\left.\left(\frac{u^3}{3}+\frac{u^2}{2}-2u+\ln(1-u)\right)\right|_0^{1/2}=-\frac{55}{64}-\ln 2$$

b) Utilizăm schimbarea de variabilă $g(x)=t\Leftrightarrow x=f(t)$.

Astfel rezultă $\int\limits_1^3 g(x)dx=\int\limits_0^1 tf'(t)dt$, apoi aplicăm integrarea prin părți.

Deci $\int\limits_1^3 g(x)dx=\int\limits_0^1 tf'(t)dt=\left.tf(t)\right|_0^1-\int\limits_0^1 f(t)dt=f(1)-\int\limits_0^1 f(x)dx=3-\int\limits_0^1 f(x)dx$.

Din egalitatea $\int_1^3 g(x)dx = 3 - \int_0^1 f(x)dx$ rezultă ceea ce trebuia arătat

c) Din egalitatea $\int_0^1 f(x)dx + \int_1^3 g(x)dx = 3$ rezultă $\int_0^1 f(x)dx + \int_1^\alpha g(x)dx + \int_\alpha^3 g(x)dx = 3$, de unde $\int_0^1 f(x)dx + \int_1^\alpha g(x)dx = 3 - \int_\alpha^3 g(x)dx$, așa încât inegalitatea de demonstrat este echivalentă cu $3 - \int_\alpha^3 g(x)dx \geq \alpha$ sau cu $\int_\alpha^3 g(x)dx \leq 3 - \alpha.$

Deoarece $g:[1,3] \to [0,1]$ rezultă $g(x) \leq 1, \forall \alpha \in [\alpha, 3]$ din care, prin integrare rezultă, $\int_\alpha^3 g(x)dx \leq 3 - \alpha.$