

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare.

a) $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow S_1(I_3) = 1, S_2(I_3) = 1, S_3(I_3) = 1 \Rightarrow S_1(I_3) = S_2(I_3) = S_3(I_3) \Rightarrow I_3 \in M.$

b) $X(1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X(1) - 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$

c) $S_1 = 2a + 2 - 2b + 3, S_2 = -7 + 2a - 1 + 3, S_3 = -1 \Rightarrow 2a - 2b + 5 = 2a - 5 = -1 \Rightarrow a = 2, b = 5.$

d) $X(a) + I_3 = \begin{pmatrix} 2a+1 & a+1 & a+2 \\ 0 & a & a-2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2a+1 & a+1 & a+2 \\ 0 & a & a-2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a(2a+1) \Rightarrow$

$$a(2a+1) = 6 \Rightarrow a \in \left\{ -2; \frac{3}{2} \right\}.$$

e) $C = \begin{pmatrix} 2a & a+1 & a+2 \\ 0 & a-1 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a & 3a+1 & 2a+2 \\ 0 & a-1 & 2a-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$S_1(C) = 4a, S_2(C) = 3a + 1 + a - 1, S_3(C) = 2a + 2 + 2a - 2 \Rightarrow S_1(C) = S_2(C) = S_3(C) \Rightarrow C \in M, \forall a \in \mathbb{R}.$$

f) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, S_1(A) = S_2(A) = S_3(A), B = \begin{pmatrix} x & y & z \\ q & r & s \\ m & n & p \end{pmatrix}, S_1(B) = S_2(B) = S_3(B) \Rightarrow$

$$A + B = \begin{pmatrix} a+x & b+y & c+z \\ d+q & e+r & f+s \\ g+m & h+n & i+p \end{pmatrix} \Rightarrow S_1(A+B) = S_1(A) + S_1(B), S_2(A+B) = S_2(A) + S_2(B),$$

$$S_3(A+B) = S_3(A) + S_3(B), \text{ dar } S_1(A) = S_2(A) = S_3(A), S_1(B) = S_2(B) = S_3(B) \Rightarrow$$

$$S_1(A+B) = S_2(A+B) = S_3(A+B).$$