Rezolvare

1. $f\left(g\left(a\right)\right)=g\left(a\right)+1=3-a+1=4-a.$

$f\left(g\left(a\right)\right)=a+4 \Leftrightarrow 2a=0 \Leftrightarrow a=0;0\in \mathbb{R}$

2.a. Coordonatele punctelor de intersecție ale graficelor lui $f;g$ le calculăm rezolvând sistemul de ecuații $\begin{cases} y=4x^2+x+1 \\ y=5x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+x+1=5x+1 \\ y=5x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-4x=0 \\ y=5x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0;x=1 \\ y=1;y=6 \end{cases}$

Deci $A\left(0;1\right),B\left(1;6\right)$ sunt punctele în care cele două grafice se intersecrează.

2.b. $f\left(x\right)\geq g\left(x\right) \Leftrightarrow 4x^2+x+1\geq 5x+1 \Leftrightarrow 4x^2-4x\geq 0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty,0\right]\cup\left[1,\infty\right)$.

3. $f\left(x\right)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1>0 \\ a^2-4\left(a+1\right)\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a\in\left[2-2\sqrt{2},2+2\sqrt{2}\right]$

Dar $a\in\mathbb{Z}$ atunci $a\in\left\{0;1;2;3;4\right\}$

4.a. Condițiile de existență sunt $\frac{x+2}{x-3}>0$ și $x\neq 3$

Notăm $\sqrt{\frac{x+2}{x-3}}=t;t>0$ atunci ecuația devine $2t+3\cdot\frac{1}{t}=5 \Leftrightarrow 2t^2-5t+3=0 \Leftrightarrow t_1=1;t_2=\frac{3}{2}$

Înlocuind $\sqrt{\frac{x+2}{x-3}}=1 \Leftrightarrow x+2=x-3 \Leftrightarrow 2=-3$ fals.

$\sqrt{\frac{x+2}{x-3}}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow 4x+8=9x-27 \Leftrightarrow 5x=35 \Leftrightarrow x=7$ care satisface ecuația,deci $\mathbb{S}=\left\{7\right\}$.

4.b. Condiția de existență : $x>0$.

Prelucrând ecuația avem: $16^{\lg x}\cdot 5^{\lg x}=6400 \Leftrightarrow \left(80\right)^{\lg x}=80^2 \Leftrightarrow \lg x=2 \Leftrightarrow x=100$.

Cum $x>0,\mathbb{S}=\left\{100\right\}$.