Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) Se arată că $\operatorname{rang}(A)=3$.

b) Se arată uşor că mulțimea soluțiilor este $S=\left\{(0,\alpha,1-2\alpha,\alpha)\,\middle|\,\alpha\in\mathbb{C}\right\}$.

c) Presupunem că sistemul are soluția $X=\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{C})$. Se obține sistemul $\begin{cases}x=0\\2x+y=0\\3x+2y+z=0\\4x+3y+2z=1\end{cases}$.

Sistemul omogen format din primele trei ecuații are doar soluția $x=y=z=0$, care nu verifică a patra ecuație a sistemului, contradicție.

2. a) Calcul direct.

b) Din a) rezultă că „$\cdot$ ” este lege de compoziție pe H_t.

Deoarece pentru $t\in\mathbb{Z}$, simetrica din grupul $(G,\cdot)$ a matricei $A(k\cdot t-1)$ este matricea $A(-k\cdot t-1)$, se arată că $\forall\, h,k\in\mathbb{Z}$, $A(h\cdot t-1)\cdot A(-k\cdot t-1)\in H_t$.

c) Fie funcția $f:G\to(0,\infty)$, $f\left(A(k)\right)=k+1$, $\forall\, k\in\mathbb{Z}$.

Se demonstrează că f este bijectivă şi că este un morfism de grupuri.