Soluție

1. a) $f'(x)=\left(x^2\ln x\right)'=\left(x^2\right)'\ln x+x^2\left(\ln x\right)'=2x\ln x+x^2\cdot\dfrac{1}{x}=x\left(2\ln x+1\right),\forall x>0$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{x\ln x}\overset{\text{cf. pct.a)}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(2\ln x+1\right)}{x\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x+1}{\ln x}\underset{L'H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(2\ln x+1\right)'}{\left(\ln x\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}}=2$.

c) $f'(x)=0\Rightarrow \underset{>0}{x}\left(2\ln x+1\right)=0\Rightarrow\ln x=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}\in\left(0,+\infty\right)$.Din tabelul de variație rezultă că $A\left(e^{-\frac{1}{2}},-\dfrac{1}{2e}\right)$ este punct de minim al funcției f. Deci $f\left(x\right)\geq-\dfrac{1}{2e}$, oricare ar fi $x>0$.

2. a) Evident că funcția g este derivabilă pe $\left(0,+\infty\right)$ și $g'\left(x\right)=\left(x\ln x\right)'=x'\ln x+x\left(\ln x\right)'=$
$=1+\ln x=f\left(x\right),\forall x>0$.

b) Avem

$$\int_1^e f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)dx\overset{cf.a)}{=}\int_1^e g'\left(x\right)\cdot g\left(x\right)dx=\left.\frac{g^2\left(x\right)}{2}\right|_1^e=\frac{g^2\left(e\right)}{2}-\frac{g^2\left(1\right)}{2}=\frac{e^2}{2}.=\left.\frac{g^2\left(x\right)}{2}\right|_1^e=\frac{g^2\left(e\right)}{2}-\frac{g^2\left(1\right)}{2}=\frac{e^2}{2}.$$

.c) Aria cerută este aria subgraficului funcției g pe intervalul $\left[1,e\right]$, adică

$$A\left(\Gamma_g\right)=\int_1^e\left|g\left(x\right)\right|dx\underset{\forall x\in[1,e]}{\overset{g(x)\geq0}{=}}\int_1^e x\ln x\,dx=\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x\,dx=\left.\frac{x^2}{2}\ln x\right|_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}\left(\ln x\right)'dx=$$

$$=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\int_1^e x\,dx=\frac{e^2+1}{4}.$$