Soluție

1. a) Avem succesiv $f'(x)=\left(x^{2008}+2008^x\right)'=\left(x^{2008}\right)'+\left(2008^x\right)'=2008\cdot x^{2007}+2008^x\ln 2008,\quad x\in\mathbb{R}$.

b) Funcția f este convexă pe $\mathbb{R}\Leftrightarrow f''(x)>0,\quad \forall x\in\mathbb{R}$. Cum

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'\overset{cf.a)}{=}\left(2008\cdot x^{2007}+2008^x\ln 2008\right)'=2008\cdot 2007\cdot x^{2006}+2008^x\ln^2 2008$$

şi cum $x^{2006}\geq 0;\ 2008^x>0;\ \ln^2 2008>0,\quad \forall x\in\mathbb{R}$, rezultă de aici că $f''(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

c) Din definiția derivatei unei funcții într-un punct (sau utilizând L'Hôspital) avem

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}f''(0)\overset{\text{cf. pct. b)}}{=}\ln^2 2008.$$

2. a) Avem $\int_1^e g(x)\,dx=\int_1^e\frac{1}{x}dx=\ln|x|\Big|_1^e=\ln e-\ln 1=1$.

b) Integrând pe $[1,e]$ identitatea dată $f(x)=g(x)-\frac{x}{x^2+1}$ obținem $\int_1^e f(x)\,dx=\int_1^e\left(g(x)-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=$

$$\underset{u'(x)=2x}{\overset{u(x)=x^2+1}{=}}\int_1^e g(x)\,dx-\frac{1}{2}\int_1^e\frac{u'(x)}{u(x)}dx=\ln|x|\Big|_1^e-\frac{1}{2}\ln|u(x)|\Big|_1^e=1-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^2+1}{2}\right).$$

c) Integrând inegalitatea $f(x)\leq\frac{1}{2x^2}$ pe $[1,e]$ obținem $\int_1^e f(x)\,dx\leq\int_1^e\frac{1}{2x^2}dx\ \overset{cf.\,b)}{\Longrightarrow}$

$$\Rightarrow 1-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^2+1}{2}\right)\leq-\frac{1}{2x}\Big|_1^e\Rightarrow 1-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^2+1}{2}\right)\leq\frac{e-1}{2e}\Rightarrow 1-\frac{e-1}{2e}\leq\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^2+1}{2}\right)\Rightarrow\frac{e+1}{e}\leq\ln\left(\frac{e^2+1}{2}\right).$$

.