Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

a) $F(x)=\int f(x)dx \Leftrightarrow F'(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}; F'(x)=f(x)-1+x\cdot\frac{1}{x}=f(x)-1+1=f(x)$, folosind formulele de derivare

b) $F(x)=\int f(x)dx=x\cdot(\ln x-1)+\ell$; $A(1,2)\in G_{F(x)}\Rightarrow F(1)=2\Rightarrow \ell=3\Rightarrow F(x)=x\cdot(\ln x-1)+3$

c) $\int_n^{n+1} g(x)dx=\int_n^{n+1} xdx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_n^{n+1}=n+\frac{1}{2}\notin\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N}$

d) Integrând prin părți, obținem: $\int_1^e f(x)\cdot g(x)dx=\int_1^e x\cdot\ln xdx=\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}\right)'\cdot\ln xdx=\frac{e^2+1}{4}$

e) Integrând prin părți, obținem: $2\cdot\int_e^{e^2}\frac{f(x)}{g(x)}dx=4\Rightarrow\int_e^{e^2}\frac{f(x)}{g(x)}dx=2$

f) Notăm $h:[1,x]\to\mathbb{R},h(t)=g(t)-f(t)$ și folosim teorema de medie pentru funcția h:

$m\cdot(b-a)\le\int_a^b h(x)dx\le M\cdot(b-a),\forall a,b\in\mathbb{R},a\le b$, unde m și M sunt valorile de minim respectiv maxim ale funcției h în intervalul $[1,x]$;

$h'(t)<0\Rightarrow h\downarrow,t\in(0,1),h'(x)>0\Rightarrow h\uparrow,t>1\Rightarrow h(t)\ge h(1)=1-\ln 1=1\Rightarrow$

(prin înlocuire în teorema de medie) $\int_1^x[g(t)-f(t)]dt=\int_1^x h(t)dt\ge 1(x-1)=x-1$