Soluție

1.a) $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}; A^t=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}=A\Rightarrow A\in P$

$B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}; B^t=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}=-B\Rightarrow B\in Q$

1.b) $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}; X^t=-X\Rightarrow\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a & -b\\ -c & -d\end{pmatrix}\Rightarrow a=d=0; c=-b$. $X=\begin{pmatrix}0 & b\\ -b & 0\end{pmatrix}$

$\det(X)=b^2\geq 0$.

1.c) Fie $A,B\in Q\Rightarrow A=\begin{pmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & b\\ -b & 0\end{pmatrix}$. $AB=\begin{pmatrix}-ab & 0\\ 0 & -ab\end{pmatrix}=(AB)^t\Rightarrow AB\in P$

2a) $f'(x)=3x^2+4x+3>0, \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ este strict crescătoare.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, f este continuă deci are P.D$\Rightarrow f(x)=0$ are o unică soluție reală.

2.b) $\hat{f}\left(\hat{0}\right)=\hat{1}, \hat{f}\left(\hat{1}\right)=\hat{1}$

2.c) Dacă $f=gh\infty, grad(h)\geq 1, grad(h)\geq 1\Rightarrow\hat{f}=\hat{g}\cdot\hat{h}$, deci $\hat{f}$ este reductibil, contradicție.