

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare.

a) $A - 2B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}.$

b) $pA + qB = \begin{pmatrix} -2p & 2p \\ 2p & -2p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2q & 2q \\ 2q & 2q \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2p+2q & 2p+2q \\ 2p+2q & -2p+2q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2p+2q = -8 \\ 2p+2q = 0 \end{cases}$
 $\Rightarrow \begin{cases} p = 2 \\ q = -2 \end{cases}.$

c) $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}, B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix},$

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2 \Rightarrow A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} = 16I_2.$$

d) $\sqrt{2}A - \sqrt{2}I_2 = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -3\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\det(\sqrt{2}A - \sqrt{2}I_2) = \begin{vmatrix} -3\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -3\sqrt{2} \end{vmatrix} = 18 - 8 = 10.$$

e) C inversabilă $\Leftrightarrow \det C \neq 0$, $\det C = \begin{vmatrix} -2+x & 2+m \\ 2 & -2+x \end{vmatrix} = x^2 - 4x - 2m \Rightarrow$

$$x^2 - 4x - 2m \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow 16 + 8m < 0 \Rightarrow m \in (-\infty, -2).$$

f) $A^{2008} \cdot B^{2008} = (AB)^{2008} \stackrel{c)}{=} O_2^{2008} = O_2.$