Soluție

1. a) Avem:
$$\left.\begin{array}{l} f_s(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(\frac{1}{e}\cdot e^x-1\right)=0 \\ f_d(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(\ln x)=0 \\ f(1)=\frac{1}{e}\cdot e^1-1=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \text{funcția } f \text{ este continuă în } x_0=1.$$

b) Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x-1}-1\right)=e^{-\infty-1}-1=-1\in\mathbb{R}$

rezultă că dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției f .

c) Avem: $f'(x)=\frac{1}{x},\quad \forall x>1$ și $f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0,\quad \forall x\in(1,+\infty)$. Deci f este concavă pe $(1,+\infty)$.

2. a) $\int_0^1\left(x^2+1\right)f(x)\,dx=\int_0^1\left(x^2+2x+1\right)f(x)\,dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}+x^2+x\right)\right|_0^1=\frac{7}{3}$

b) $f(x)=1+\frac{2x}{x^2+1}\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(1+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx\overset{\substack{u(x)=x^2+1\\ u'(x)=2x}}{=}\int_0^1 1dx+\int_0^1\frac{u(x)}{u'(x)}dx=x\Big|_0^1+\ln\left|u(x)\right|\Big|_0^1=\ln(2e)$

c) $\int_0^1 f'(x)\cdot e^{f(x)}dx=\int_0^1\left(e^{f(x)}\right)'dx=e^{f(x)}\Big|_0^1=e(e-1)$