Soluție:

a) $f'(x)=e^x\cdot\left(ax^2+2ax+b\right)$ şi $f'(x)=g(x),\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow a=1,b=1$

b) $G(x)=\left(x^2+1\right)\cdot e^x+k$. Din $G(0)=2\Rightarrow k=1$, deci $G(x)=\left(x^2+1\right)\cdot e^x+1$

c) $\int_0^3 f(x)\cdot e^{-x}dx=\int_0^3\left(ax^2+b\right)dx=9a+3b$ .Continuând,avem $9a+3b\in\mathbb{Z}\Rightarrow$ putem lua , de exemplu ,

$a=b=\frac{1}{3}\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$,pentru care $9a+3b=4\in\mathbb{Z}$

d) Integrare prin părți şi avem $\int_0^1 ax^2\cdot e^x dx=a(e-2)$, de unde $a=1$

e) Pentru orice $x>0$ avem $(x+1)^2\cdot e^x\geq(x+1)^2$. Integrăm inegalitatea anterioară pe $[0,c]$ şi avem

$\int_0^c g(x)dx\geq\frac{c^3}{3}+c^2+c\geq c,\forall c>0$

f) $\int_1^2\frac{g(x)}{f(x)}dx<\int_1^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$,deci $\int_1^2\frac{g(x)}{f(x)}dx=\frac{3}{2}+2\ln 2<\frac{3}{2}+2\cdot\frac{3}{4}=3$