Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) Avem ca $f'(x)=1-\cos x \geq, x\in \mathbb{R}$ si f nu se anuleaza pe o multime care sa fie interval. Asadar,functia f este strict crescatoare pe $\mathbb{R}$.

b) Din ipoteza rezulta ca $x_n=\sin x_n+n$. Arata ca $x_n\geq n-1$ Rezulta ca sirul(x_n) este nemarginit deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}(n-1)=\infty$.

c) Avem ca $\frac{x_n}{n}\in\left[\frac{n-1}{n},\frac{n+1}{n}\right]$ Limita ceruta este egala cu 1 (teorema clestelui).

2.a) Avem : $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1-x^n}{1-x}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1+x+x^2+...+x^{n-1}\right)dx=\left(x+\frac{x^2}{2}+...+\frac{x^n}{n}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=a_n$.

b) Avem ca $t\in\left[0;\frac{1}{2}\right]\Rightarrow 0\leq g_n(t)\leq g_n\left(\frac{1}{2}\right)$

Atunci rezulta ca $0\leq\int_0^{\frac{1}{2}}g_n(t)dt\leq\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2^{n-1}}dt=\frac{1}{2^n}, n\in\mathbb{N}^*$.

c) Sirul care ne intereseaza este notat a_n .Avem ca $a_n=-\ln(1-x)\Big|_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}g_n(x)dx\to-\ln\frac{1}{2}=\ln 2.$