

Soluție

1.a) $h(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1} \Rightarrow h'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. Dreapta de ecuație $y = 1$ este asimptotă către $+\infty$ la graficul funcției f .

c) $h(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}; h'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} \geq 0$ oricare ar fi $x \in [0, \infty) \Rightarrow h$ crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.

2.a) $f(x) = 1 + \frac{2}{x^2 + 4x + 3} = 1 + \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 3}; A = 1, B = -1$ c.c.t.d.

b) $\int_0^1 f(x) dx = \left(\ln \frac{x+1}{x+3} + x \right) \Big|_0^1 = \ln \frac{3}{2} + 1$.

c) $f(x) > 0$ oricare ar fi $x \geq 0 \Rightarrow$

$$\text{Aria}(\Gamma_f) = \int_0^k f(x) dx = \left(\ln \frac{x+1}{x+3} + x \right) \Big|_0^k = \ln \left(\frac{k+1}{k+3} \cdot \frac{3}{1} \right) + k = k + \ln k$$

$$\Rightarrow \frac{3k+3}{k+3} = k \Leftrightarrow 3k+3 = k^2 + 3k \Rightarrow k = \sqrt{3}.$$