Rezolvare:

a. Pentru $a=0$ se obține $A(0)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, aşadar, $A(0)=O_3$, deci $O_3\in M$.

b. $A(a)=\begin{pmatrix}a&0&a\\0&0&0\\a&0&a\end{pmatrix}$. O matrice este inversabilă dacă şi numai dacă are determinantul nenul,

$\det A(a)=0$, deci matricea $A(a)$ nu este inversabilă.

c. $A(a)=\begin{pmatrix}a&0&a\\0&0&0\\a&0&a\end{pmatrix}$, $A(b)=\begin{pmatrix}b&0&b\\0&0&0\\b&0&b\end{pmatrix}$. Atunci

$$A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix}a&0&a\\0&0&0\\a&0&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b&0&b\\0&0&0\\b&0&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2ab&0&2ab\\0&0&0\\2ab&0&2ab\end{pmatrix}\in M$$

d. Conform rezultatului obținut la punctul anterior, vom avea $A(b)\cdot A(a)=A(2ba)$. Dar cum $a,b\in\mathbb{R}$ parametrii şi înmulțirea numerelor reale este comutativă, vom avea $2ab=2ba$ de unde $A(2ab)=A(2ba)\Leftrightarrow A(a)\cdot A(b)=A(b)\cdot A(b),(\forall)a,b\in\mathbb{R}$

e. Deja se cunoaşte relația $A(a)\cdot A(b)=A(2ab)$, ceea ce va duce la $A(a)\cdot A(e)=A(2ae)$. Din identitatea $A(a)\cdot A(e)=A(a)$ se va obține $A(2ae)=A(a)\Leftrightarrow 2ae=a\Leftrightarrow e=\frac{1}{2}$, fiind singura valoare reală ce verifică identitatea $A(a)\cdot A(e)=A(a),(\forall)A(a)\in M$. Aşadar matricea $A(e)=A\left(\frac{1}{2}\right)$

f. $A(x)=\begin{pmatrix}x&0&x\\0&0&0\\x&0&x\end{pmatrix}$. $2A(xy)=2\begin{pmatrix}xy&0&xy\\0&0&0\\xy&0&xy\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2xy&0&2xy\\0&0&0\\2xy&0&2xy\end{pmatrix}$,

$$A(x)\cdot A(y)=A(2xy)=\begin{pmatrix}2xy&0&2xy\\0&0&0\\2xy&0&2xy\end{pmatrix}.$$

Deci $2A(xy)=A(x)\cdot A(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.