Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) $f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}-\alpha$.

Dacă $x<0$ rezultă $1+x<1$, deci rezultă $(1+x)^{\alpha-1}<1$, de unde $\alpha(1+x)^{\alpha-1}<\alpha$ și în final $f'(x)<0$.

Dacă $x>0$ rezultă $1+x>1$, deci rezultă $(1+x)^{\alpha-1}>1$, de unde $\alpha(1+x)^{\alpha-1}>\alpha$ și în final $f'(x)>0$.

Rezultă *f* strict descrescătoare pe $(-1,0)$ şi strict crescătoare pe $(0,\infty)$.

b) *f* este strict descrescătoare pe $(-1,0)$, deci $x<0\Rightarrow f(x)>f(0)=1$.

f este strict crescătoare pe $(0,\infty)$, deci $x>0\Rightarrow f(x)>f(0)=1$.

Aşadar $f(x)>1,\forall x\in(-1,\infty)\setminus\{0\}$, de unde rezultă cea ce trebuia demonstrat.

c) $f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-1}>0,\forall x\in(-1,\infty)$. Rezultă *f* convexă pe $[0,\infty)$ .Prin urmare $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{f(a)+f(b)}{2},\forall a,b\in[0,\infty)$. Pentru $a=2x$ şi $b=2y$ rezultă inegalitatea din enunț.

2.a) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{x}{1+x}dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx=\left(x-\ln(1+x)\right)\Big|_0^1=\ln 2$.

b) Deoarece

$$[x]=\begin{cases}1, & x\in[1,2)\\ 2, & x\in[2,3)\\ 3, & x\in[3,4)\\ 4, & x=4\end{cases}$$

rezultă $\int_1^4 f^2(x)[x]dx=\int_1^2 f^2(x)dx+2\int_2^3 f^2(x)dx+3\int_3^4 f^2(x)dx$.

Prin urmare este suficient să calculăm $\int_a^b f^2(x)dx=\int_a^b\left(1-\frac{1}{1+x}\right)^2dx=\int_a^b\left(1-\frac{2}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}\right)^2dx$

Dar $\int_a^b\left(1-\frac{2}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}\right)^2dx=\left(x-2\ln(1+x)-\frac{1}{1+x}\right)\Big|_a^b=b-2\ln(1+b)-\frac{1}{1+b}-$

$-a+2\ln(1+a)+\frac{1}{1+a}=b-a+2\ln\frac{1+a}{1+b}+\frac{b-a}{(1+a)(1+b)}$.

c) Deoarece $\int_0^n f(x)dx=\int_0^n\frac{x}{1+x}dt=\left(x-\ln(1+x)\right)\Big|_0^n=\ln(1+n)-n$ **și** $f(k)=1-\frac{1}{k+1}$ rezultă

$a_n=\sum_{k=1}^n f(k)-n+\ln(1+n)=\ln(1+n)-\sum_{k=1}^n\frac{1}{k+1}$. Prin urmare $a_n=1-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)\right)$

$0<a_n\le 1,\forall n\ge 1$, deci şirul $(a_n)_{n\ge1}$ este mărginit

Şirul $(a_n)_{n\ge1}$ este crescător. Fiind crescător și mărginit este convergent.

Observație. Șirul are limita $1-\gamma$ unde $\gamma=0,57721...$ este *constanta lui Euler*.