Rezolvare

a) Cum pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$, avem $(x * y) * z = a^2 x + a^2 y + az + 3a + 3$,
$x * (y * z) = ax + a^2 y + a^2 z + 3a + 3$ şi $a \neq 0$ rezultă că $a = 1$.

b) Din definiția elementului neutru avem $x * e = x$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow ax + ae + b = x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ ae + b = 0 \end{cases}$. Deci legea admite element neutru dacă şi numai dacă $a = 1$ şi se mai ține cont de punctul precedent în cazul $b \in \mathbb{R}$.

c) Se ține cont de punctul precedent şi deci $e = -3$ (eventual se obține direct din definiția elementului neutru).

d) Se ține cont de punctele precedente, faptul că legea este peste tot definită şi că orice element $x \in \mathbb{R}$ admite simetricul $x' = -6 - x \in \mathbb{R}$.

e) Notând $3^x = t$, se obține ecuația $t^2 + t - 12 = 0$, cu soluțiile $t \in \{3, -4\}$ şi cum $3^x = t > 0$ se obține $x = 1$.

f) Cum $(x * x) * x = (2a^2 + a)x + ab + a$ prin identificare se obține sistemul $\begin{cases} 2a^2 + a = 1 \\ ab + b = 0 \end{cases}$. Din prima ecuație se obține $a \in \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$. Pentru $a = -1$, rezultă $b \in \mathbb{R}$, iar pentru $a = \frac{1}{2}$ se obține $b = 0$ soluție ce nu convine.