Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) $f'(x)=(\ln x - x+1)'=(\ln x)'-x'+1'=\frac{1}{x}-1, \forall x>0$.

b) $f'(x)=\frac{1}{x}-1=0 \Rightarrow x=1\in(0,+\infty)$.Din tabelul de variație al funcției obținem $\begin{cases} f \nearrow & pentru\ x\in(0,1] \\ f \searrow & pentru\ x\in[1,+\infty) \end{cases}$.
Aşadar $A(1,0)$ este punct de maxim al funcției f.

c) $f\left(x^{2008}\right)+f\left(\frac{1}{x^{2008}}\right)=0 \Rightarrow \left(\ln\left(x^{2008}\right)-x^{2008}+1\right)+\left(\ln\left(\frac{1}{x^{2008}}\right)-\frac{1}{x^{2008}}+1\right)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow 2008\ln x - x^{2008}-2008\ln x-\frac{1}{x^{2008}}+2=0\Rightarrow\left(x^{2008}-1\right)^2=0\Rightarrow x_{1,2}=\pm1$ şi cum $x>0\Rightarrow x=1\in(0,+\infty)$.

2. a) $\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2(x-1)dx \overset{\text{I ramură}}{=} \left.\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\right|_1^2=\frac{1}{2}$.

b) Cum $x\in[-a,a]$ şi $a\in(0,1)$ rezultă că $x<1\Rightarrow f(x)=-x+1$. Deci $\int_{-a}^{a} f(x)dx=1\Rightarrow\int_{-a}^{a}(-x+1)dx=1\Rightarrow$

$\Rightarrow\left.\left(-\frac{x^2}{2}+x\right)\right|_{-a}^{a}=1\Rightarrow\left(-\frac{a^2}{2}+a\right)-\left(-\frac{(-a)^2}{2}+(-a)\right)=1\Rightarrow a=\frac{1}{2}\in(0,1)$.

c) $\forall x\in[0,1]$ avem $e^x\geq1$. Prin urmare

$f\left(e^x\right)=e^x-1\Rightarrow\int_0^1 x\cdot f\left(e^x\right)dx=\int_0^1 x\cdot\left(e^x-1\right)dx=\int_0^1 x\cdot e^x\,dx-\int_0^1 x\,dx=$

$=\int_0^1 x\cdot\left(e^x\right)'dx-\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1=\left.\left(x\cdot e^x\right)\right|_0^1-\int_0^1 e^x\,dx-\frac{1}{2}=e-\left.e^x\right|_0^1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.