rezolvare

1a) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2}$

b) Din cele de mai sus, dreapta $y = \dfrac{\pi}{2}$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

c) Deoarece arctg este funcție strict crescătoare, funcția dată are aceleaşi puncte de extrem local ca și funcția $g:\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\to\mathbb{R}, g(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$, adică $x=0$.

2a) $F'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{x}{x^2+1}=f(x)$.

b) $\int_0^1 f(x)dx = F(x)\Big|_0^1=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\ln 2$.

c) $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n+k}{n^2+k^2}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ reprezintă sume Riemann asociate funcției f, diviziunilor $D_n=\left(0,\dfrac{1}{n},\dfrac{2}{n},\dots,\dfrac{n}{n}\right)$ şi punctelor intermediare $X_n=\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{2}{n},\dots,\dfrac{n}{n}\right)$. Deoarece funcția este integrabilă, fiind continuă, iar şirul normelor diviziunilor tinde la 0, şirul $(a_n)_n$ este convergent.