

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SOLUȚIE:

a) Domeniul funcției h este $D = D_1 \cap D_2$; $D_1 = (0, \infty) \setminus \{1\}$, $D_2 = (0, \infty) \Rightarrow D = (0, \infty) \setminus \{1\}$.

$$\text{b) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{x-1} - \ln x + 2 \ln(x+3) \right) = -1 - (-\infty) + 2 \ln 3 = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (2 \ln x - \ln(x+3)^2) = 2(-\infty) - \ln 9 = -\infty \text{ și } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x)$$

$$\text{c) } h(x) = \frac{1}{x-1} + \ln x \text{ și } D = (0, \infty) \setminus \{1\}.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} h(x) = -1 + (-\infty) = -\infty \Rightarrow \text{dreapta } x=0 \text{ este asimptotă verticală la graficul funcției } h.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} h(x) = \frac{1}{0_-} = -\infty, \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} h(x) = \frac{1}{0_+} = +\infty \Rightarrow \text{dreapta } x=1 \text{ este asimptotă verticală}.$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 2008} \frac{h(x) - h(2008)}{x - 2008} = h'(2008)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2008} \frac{h(x) - h(2008)}{x - 2008} - \frac{1}{2008} = -\frac{1}{2007^2} + \frac{1}{2008} - \frac{1}{2008} = -\left(\frac{1}{2007}\right)^2 \text{ Numărul } -\left(\frac{1}{2007}\right)^2 \text{ este}$$

opusul pătratului numărului rațional $\frac{1}{2007}$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = h(x_0), \forall x_0 \in D \Rightarrow h \text{ este continuă pe } D = (0, 1) \cup (1, \infty)$$

$$\text{f) } \text{Un exemplu imediat este } f_1 : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = \ln x. \text{ Funcția } f_1 \text{ este strict crescătoare} \\ \Rightarrow f_1'(x) > 0, \forall x \in (0, \infty) \text{ și } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f_1(x) = -\infty.$$