Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) Determinantul matricei sistemului este $\Delta = ab(b-a)(a-1)(b-1)$.

b) Sistemul este compatibil determinat dacă $\Delta \neq 0$. Rezultă $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, $a \neq b$.

c) Evident $\operatorname{rang} A \leq \operatorname{rang} \overline{A}$

Coloana termenilor liberi este aceeaşi cu a treia coloană a matricei sistemului, deci orice minor al matricei extinse este şi minor al matricei sistemului. Ca urmare, $\operatorname{rang} \overline{A} \leq \operatorname{rang} A$, deci $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A}$, adică sistemul este compatibil.

2.a) $f^2 = (\hat{2}X + \hat{1})^2 = \hat{1}$, polinom care are gradul 0.

b) Cum $f \cdot f = \hat{1}$, f este element inversabil al inelului $(\mathbb{Z}_4[X], +, \cdot)$ şi $f^{-1} = f$.

c) Fie $g \in \mathbb{Z}_4[X]$, $g = ax + b$, $a \neq \hat{0}$, astfel încât $g^2 = \hat{1}$. Rezultă $\begin{cases} a^2 = \hat{0} \\ \hat{2}ab = \hat{0} \\ b^2 = \hat{1} \end{cases}$. Obținem $b = \hat{1}$ sau $b = \hat{3}$ şi $a = \hat{2}$. Obținem două polinoame cu proprietatea cerută în enunț: $g_1 = \hat{2}X + \hat{1}$ şi $g_2 = \hat{2}X + \hat{3}$.