

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) $(x-1) \cdot f(x) = (x-1) \cdot \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^3} = \frac{x^4 + x^3 + x^2 + x - x^3 - x^2 - x - 1}{x^3} = \frac{x^4 - 1}{x^3} = x - \frac{1}{x^3} = g(x)$

b) Fie $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ primitivă a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; derivând $F(x) = \int f(x)dx \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

Deoarece $x \in (0; +\infty) \Rightarrow x^2, x^3 > 0 \Rightarrow f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} > 0, \forall x \in (0; +\infty) \Rightarrow$

$F'(x) = f(x) > 0, x \in (0; +\infty) \Rightarrow F \uparrow, x \in (0; +\infty)$ (F este strict crescătoare pe $(0; +\infty)$)

c) $F(x) = \int f(x)dx = \int \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)dx = x + \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \ell; A\left(1, -\frac{1}{2}\right) \in G_{F(x)} \Rightarrow F(1) = -\frac{1}{2} \Rightarrow$

$\ell = 0 \Rightarrow F(x) = x + \ln x - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}, x > 0$

d) $\int_1^2 x^3 f(x)dx = \int_1^2 (x^3 + x^2 + x + 1)dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_1^2 = \frac{103}{12}$

e) notăm $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x - \frac{1}{x^3}$ și folosim proprietatea: $0 \leq g(x), \forall x \in [a, b] \Rightarrow 0 \leq \int_a^b g(x)dx$

$x - \frac{1}{x^3} = \frac{x^4 - 1}{x^3} \geq 0, \forall x \geq 1 \Rightarrow g(x) \geq 0, \forall x \geq 1 \Rightarrow$ prin înlocuire, avem: $\int_a^b g(x)dx \geq 0$, oricare ar fi

$a, b \in \mathbb{R}, 1 \leq a \leq b$

f) $\int_1^e g\left(\frac{1}{x}\right)dx = \int_1^e \left(\frac{1}{x} - x^3\right)dx = \left(\ln|x| - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_1^e = \frac{5 - e^4}{4}$