Soluție

1. a) Calcul direct.

b) Se obține $\left(8x^3+2x\right)A(x)=O_2$ și apoi $x\in\left\{-\frac{i}{2},\frac{i}{2},0\right\}$.

c) Presupunem că ecuația are soluția $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$. Atunci $X^4=\left(A(0)\right)^2=O_2$.

Rezultă $\det(X)=0$ și $X^2=t\cdot X$, unde $t=a+d$.

Se demonstrează că $X^4=t^3\cdot X$, deci $X=O_2$ sau $t=0$. În ambele cazuri rezultă $X^2=O_2$, fals.

2. a) $a_{2008}=2$ și $a_{2007}=0$.

b) Din teorema împărțirii cu rest, există și sunt unice $q\in\mathbb{C}[X]$ și $a,b\in\mathbb{C}$, astfel încât $f=\left(X^2-1\right)\cdot q+aX+b$. Obținem $a=\frac{f(1)-f(-1)}{2}$ $b=\frac{f(1)+f(-1)}{2}$.

Cum $f(1)=f(-1)=2^{1005}$, restul împărțirii polinomului f la X^2-1 este $r=2^{1005}$.

c) Fie $z\in\mathbb{C}$ rădăcină a lui f. Atunci $(z+i)^{2008}=-(z-i)^{2008}$, de unde rezultă $|z+i|=|z-i|$ și înlocuindu-l pe $z=a+b\cdot i$, cu $a,b\in\mathbb{R}$ în relația precedentă, deducem $b=0$, deci $z\in\mathbb{R}$.