Soluție

a) $\int x^3 f(x)dx = \int (x^2 - x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \ell, \ell \in \mathbb{R}$

b) $\int_1^e f(x)dx = \int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx = \int_1^e \frac{1}{x}dx - \int_1^e x^{-2}dx = \ln|x|\Big|_1^e - \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^e = \frac{1}{e}$

c) $\int_1^n x^2 f(x)dx = \int_1^n (x-1)dx = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^n = \frac{(n-1)^2}{2} \Rightarrow (n-1)^2 = 16 \Rightarrow n_1 = -3, n_2 = 5; n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 5$

d) $t_{F(x_0)} \,//\, d : mx - y + 2 = 0 \Rightarrow F'(x_0) = m \Rightarrow F'(x) = f(x) \Rightarrow F'(x_0) = F'(2) = f(2) = \frac{1}{4} \Rightarrow m = \frac{1}{4}$

e) Integrând prin părți, obținem: $\int_1^e f(x)\ln x dx = \frac{2}{e} - \frac{1}{2}$

f) folosim teorema de medie pentru funcția f :

„$m \cdot (b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M \cdot (b-a), \forall a,b \in \mathbb{R}, a \le b$**,** unde m și M sunt valorile de minim respectiv maxim ale funcției g în intervalul $[a,b]$**”**; $x^2 - x + 1 \ge 0 \Leftrightarrow x^2 \ge x - 1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2} \le 1 \Leftrightarrow f(x) \le 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_a^{a+1} f(x)dx \le 1\left[(a+1) - a\right] = a + 1 - a = 1$