

Rezolvare

1. a. $f_1'(x) = \left(\frac{\ln x}{x^2} \right)' = \frac{(1 - 2 \ln x)}{x^3}$.

b. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = 0$

c. Din $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{e}$ punct de maxim și f descrescătoare pe $[\sqrt{e}, \infty)$. Din $f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e} \Rightarrow$ relatia cerută.

2.a. $\int_1^e x \left(f(x) + \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx = \int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^e = 1$.

b. F primitiva funcției $f \Rightarrow F'(x) = f(x)$ și $F'(x) = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} > 0, \forall x > 0 \Rightarrow F$ funcție crescătoare pe $(0, +\infty)$

c. $\int_1^2 f(x) f'(x) dx = \frac{f^2(x)}{2} \Big|_1^2 = -\frac{22}{81}$