Soluție:

1. a) Notăm cu A matricea sistemului.
Prin calcul direct se obține $\det(A) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-3abc)$.

b) $\det(A) \neq 0$, deci sistemul are soluție unică.

c) Adunând cele trei ecuații ale sistemului, obținem $(a+b+c)(x+y+z)=3 \Leftrightarrow 0=3$, fals.

2. a) Folosind relațiile lui Viete, se obține $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=0$.

b) Notând $x^2 = t$ obținem ecuația $t^2 - 5t + 5 = 0$, cu soluțiile $t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2} > 0$, deci ecuația inițială are toate rădăcinile reale.

c) Dacă $\operatorname{grad}(g) > 4$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty}\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right| = +\infty$, dar din ipoteză rezultă $\lim\limits_{x\to\infty}\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right| \le 1$, contradicție.

În consecință, $\operatorname{grad}(g) \le 4$. Din ipoteză deducem că $\forall k \in \{1, 2, 3, 4\}$, $|g(x_k)| \le |f(x_k)| = 0$, deci $|g(x_k)| = 0$, de unde rezultă $g(x_k) = 0$, adică $g = a \cdot f$, cu $a \in \mathbb{R}$. Înlocuind în relația din enunț, obținem că $|a| \le 1$. Aşadar, soluțiile sunt polinoamele $g = a \cdot f$, cu $a \in [-1, 1]$.