Soluție

1.a) Din $x_{n+1} = x_n^2 + 1$ rezultă $x_{n+1} - x_n = x_n^2 - x_n + 1 > 0, \forall n \geq 1$, $\forall$ n $\geq$ 1, deci şirul este strict crescător. Cum $x_n \geq x_1$, şirul este mărginit inferior. Demonstrăm că şirul este nemărginit superior. Într-adevăr, presupunând că este mărginit superior, conform teoremei lui Weierstrass rezultă că este convergent, deci are limită şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$. Trecând la limită în relația de recurență și, ținând cont de teorema referitoare la operații cu şiruri care au limită, rezultă $x = x^2 + 1$, de unde $x^2 + x + 1 = 0$, deci $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, contradicție cu $x \in \mathbb{R}$. Prin urmare şirul dat este strict crescător şi nemărginit superior, deci are limită şi aceasta este ∞.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3 + x, & x \leq 0 \\ arctgx, & x > 0 \end{cases}$.

Funcția f este derivabilă pe fiecare din intervalele (–∞, 0) şi (0, ∞) şi $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1, & x < 0 \\ \dfrac{1}{x^2+1}, & x > 0 \end{cases}$. Apoi:

$$f_s^{'}(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{x^3 + x}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (x^2 + 1) = 1;$$

$$f_d^{'}(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{arctgx - 0}{x - 0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{arctgx - arctg0}{x - 0} = arctg\,'0 = 1.$$

Deoarece $f_s^{'}(0) = f_d^{'}(0) = 0$ rezultă f derivabilă şi în 0 şi $f'(0) = 0$. Prin urmare, f este derivabilă şi

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1, & x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x^2+1}, & x > 0 \end{cases}.$$

c) Fie $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ $h(x) = f(x) - a + 2\ln x$. Atunci $h'(x) = 2x - \dfrac{2}{x}$.

Pentru $x \in \mathbb{R}_+^*$, $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Se obține că 1 este punct de minim, deci $h(x) \geq h(1) = 2 - a, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

Prin urmare, $h(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$ dacă şi numai dacă $a \leq 2$. Deci cel mai mare număr real a cu proprietatea certă este 2.

2.a) $\int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 xe^{-x^2} dx$. Se utilizează schimbarea de variabilă $x^2 = t$. Se obține:

$$\int_0^1 xf(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-t}dt = -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(e^{-t}\right)' dt = -\frac{1}{2}e^{-t}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-1}\right).$$

b) Suntem în cazul $\dfrac{0}{0}$. Aplicăm regula lui l´Hôspital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(\cos x) - F(1)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin xF'(\cos x)}{2x}; \text{ apoi:}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\sin xF'(\cos x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \left(-\frac{\sin x}{2x} \cdot f(\cos x) \right) = -\frac{1}{2} f(1) = -\frac{1}{2} e^{-1}.$$

c) $g'(x) = F'(x) + f'(x) = f(x) - 2xe^{-x^2} = (1 - 2x)e^{-x^2}$

Tabelul de variație al funcției g este:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$

$g'(x)$	$+\ +\ +\ +\ +$	0	$-\ -\ -\ -\ -$
$g(x)$	$\nearrow$	$g\left(\frac{1}{2}\right)$	$\searrow$

Din tabelul de variație rezultă că g are exact un punct de extrem local.