Soluție

1.a. Se verifică uşor că $A = I_3 + B$ deoarece $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. det A= $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow A$ este inversabilă şi $A^{-1} = A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c. Avem $\det X(a) = (a+1)^3$ şi relația din enunț devine $\det X(a) = (2a-1)^3 \Rightarrow (a+1)^3 = (2a-1)^3$ $\Leftrightarrow a+1 = 2a-1 \Leftrightarrow a = 2$.

2.a. $x * y = xy - x - y + 1 + 1 = x(y-1) - (y-1) + 1 = (x-1)(y-1) + 1$

b.
$(x*y)*z = (xy - x - y + 2)*z = (xy - x - y + 2)\cdot z - (xy - x - y + 2) - z + 2 = xyz - xy - yz - xz + x + y + z + 4 =$
$= x*(y*z)$.

c. $\frac{\sqrt{1}}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{\sqrt{4}}{2} \ldots * \frac{\sqrt{2008}}{2} = 1,$ deoarece $a * 1 * b = 1$.