Soluție

1.a. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow A \in \mathcal{G}$.

b. $\left[\frac{1}{2}(X + I_2)\right]^2 = \frac{1}{4}(X + I_2)(X + I_2) = \frac{1}{4}X^2 + XI_2 + I_2X + I_2^2 = \frac{1}{4}(-I_2 + A + A + I_2) = \frac{1}{4} \cdot 2A = \frac{1}{2}X$..

c. Din $A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & t \\ -x & -y \end{pmatrix}$ si $X \cdot A = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y & x \\ -t & z \end{pmatrix}$ rezultă că X este de forma $X = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$, unde $x, y \in \mathbb{R}$.

2.a. $f(1) + f(-1) = 1^2 + a + b + c + 1 - a - b + c + 1$ si înlocuind pe $c = 501$ avem
$f(1) + f(-1) = 2 + 2c = 2 + 2 \cdot 501 = 1004$.

b. Pentru $a = -2, b = 2, c = -1$
avem $x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \left(x^2 - 1\right)\left(x^2 + 1\right) - 2x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 1\right)\left(x^2 - 2x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow$
$(x-1)(x+1)(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^3(x+1) = 0$ Deci rădăcinile polinomului sunt $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ și $x_4 = -1$.

c. Sistemul format de ecuațiile: $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 0 \\ f(-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a + b + c + 1 = 0 \\ -a - b + c + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a + b = -1 \\ a + b = 1 \end{cases}$ este sistem imposibil.