Soluție

1. a) Avem: $\left.\begin{array}{l} f_s(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left(e^x\right)=1 \\ f_d(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(1+\sqrt{x}\right)=1 \\ f(0)=1+\sqrt{0}=1 \end{array}\right\}\Rightarrow$ funcția f este continuă în $x_0=0$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x\right)=e^{-\infty}=0$. Deci dreapta $d: y=0$ este asimptotă orizontală la G_f către $-\infty$.

c) Funcția f este concavă pe $(0,+\infty)$ atunci când $f''(x)<0, \forall x>0$. Cum $f'(x)\overset{\text{pt. } x>0}{=}\left(1+\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f''(x)\overset{\text{pt. } x>0}{=}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)'=-\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}<0$, pentru orice $x>0$, rezultă în final că f este concavă pe $(0,+\infty)$.

2. a) Deoarece $f\left(\sqrt{x}\right)=e^{\left(\sqrt{x}\right)^2}=e^x, \forall x\geq 0 \Rightarrow \int\limits_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)dx=\int\limits_0^1 e^x\,dx=e^x\Big|_0^1=e-1$.

b) $\int\limits_0^1 f(x)\cdot g(x)dx=\int\limits_0^1 x\cdot e^{x^2}\,dx \underset{u'(x)=2x}{\overset{u(x)=x^2}{=}} \dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 u'(x)\cdot e^{u(x)}\,dx=\dfrac{1}{2}e^{u(x)}\Big|_0^1=\dfrac{e-1}{2}$.

c) Avem succesiv:

$\int\limits_0^1 f\left(x^n\right)g^{2n-1}(x)dx=\int\limits_0^1 x^{2n-1}\cdot e^{x^{2n}}\,dx \underset{u'(x)=2nx^{2n-1}}{\overset{u(x)=x^{2n}}{=}} \dfrac{1}{2n}\int\limits_0^1 u'(x)\cdot e^{u(x)}\,dx=\dfrac{1}{2n}\,e^{u(x)}\Big|_0^1=\dfrac{e-1}{2n},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.