

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) Din definiția elementului neutru ($\exists e \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x * e = x * e = x$, $\forall x \in \mathbb{Z}$) cum legea este comutativă,

avem $x * e = x$, $\forall x \in \mathbb{Z}$, adică $(e + 2)x + 2e + a = x$, $\forall x \in \mathbb{Z}$ de unde
$$\begin{cases} e + 2 = 1 \\ 2e + a = 0 \end{cases}$$
. Deci $a = 2$ și $e = -1$.

b) Cum $x * y = (x + 2)(y + 2) - 2$, asociativitatea rezultă din

$$(x * y) * z = (x + 2)(y + 2)(z + 2) - 2 = x * (y * z).$$

c) Din egalitățile $(x + y + 2) * z = (x + y + 4)(z + 2) - 2$ și

$(x * z) + (y * z) + 2 = (x + 2)(z + 2) - 2 + (y + 2)(z + 2) - 2 + 2 = (x + y + 4)(z + 2) - 2$ rezultă că egalitatea din enunț este adevărată.

d) Din $x * x' = (x + 2)(y + 2) - 2 = -1$, rezultă $x' = -2 + \frac{1}{x + 2} \in \mathbb{Z}$ pentru $x \in \mathbb{Z}$. Atunci $(x + 2) \mid 1$, adică

$$(x + 2) \in \{-1, 1\}. \text{ Imediat obținem } x \in \{-3, -1\}$$

e) Din $x * y = 3$ se obține $(x + 2)(y + 2) = 5$, de unde $(x + 2; y + 2) \in \{(1; 5), (-1; -5), (5; 1), (-5; -1)\}$ și

atunci mulțimea soluțiilor ecuației este $\{(-1; 3), (-3; -7), (3; -1), (-7; -3)\}$

f) Cum $(-3) * (-3) = a - 3 = (-1) * (-1) \in \{-3, -1\}$ atunci se obține $a \in \{0, 2\}$. De asemenea

$(-3) * (-1) = (-1) * (-3) = a - 5 \in \{-3, -1\}$, adică $a \in \{2, 4\}$. Prin urmare $a = 2$.