Soluție

1. a) Calcul direct

b) Se demonstrează prin inducție după $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Din ipoteză rezultă $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X$, iar din **a)**, că există $u, v \in \mathbb{R}$, astfel încât $X = \begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix}$.

Folosind **b)** găsim $\begin{cases} \dfrac{(u+v)^3 + (u-v)^3}{2} = 2 \\ \dfrac{(u+v)^3 - (u-v)^3}{2} = 1 \end{cases}$ şi soluția: $X = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt[3]{3}+1}{2} & \dfrac{\sqrt[3]{3}-1}{2} \\ \dfrac{\sqrt[3]{3}-1}{2} & \dfrac{\sqrt[3]{3}+1}{2} \end{pmatrix}$.

2. a) Calcul direct.

b) Calcul direct, $-\widehat{16} = \hat{5}$ în $\mathbb{Z}_7$.

c) Pentru $a \in \mathbb{Z}_7$, $a \neq \hat{0}$, $\forall x \in \mathbb{Z}_7$, $f(x) = \hat{6} + a \cdot x$. Avem $f(a^{-1}) = \hat{0}$, deci f este reductibil.

Pentru $a = \hat{0}$, $f = (X^3 - \hat{3}) \cdot (X^3 + \hat{3})$, deci f este reductibil.