

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) Cum $\log_2 x^{\log_2 y} = (\log_2 y)(\log_2 x)$ și $\log_2 2^{(\log_2 x)(\log_2 y)} = (\log_2 x)(\log_2 y)$ rezultă că $\log_2 x^{\log_2 y} = \log_2 2^{(\log_2 x)(\log_2 y)}$ și deci $x * y = 2^{(\log_2 x)(\log_2 y)}$.

b) Cum $2^2 * 4^2 = 2^{(\log_2 2^2)(\log_2 4^2)} = 2^8$, atunci $a = 2^8 * 2^3 = 2^{24}$. Analog $b = (2^2 * 2^3) * (2^2 * 4^2) = 2^5 * 2^6 = 2^{30}$ și atunci $a < b$.

c) Asociativitatea rezultă din

$$(x * y) * z = 2^{(\log_2(x*y))(\log_2 z)} = 2^{(\log_2 x)(\log_2 y)(\log_2 z)} = 2^{(\log_2 x)(\log_2(y*z))} = x * (y * z).$$

d) Din definiția elementului neutru ($\exists \theta \in G$ astfel încât $x * \theta = \theta * x = x$, $\forall x \in G$) se obține $x * \theta = x^{\log_2 \theta} = x$, adică $\theta = 2$.

e) Din definiția elementului simetrizabil, pentru $x = 8^3$, există $x' \in H$ astfel încât $x * x' = x' * x = \theta = 2$ și atunci $x * x' = 2^{(\log_2 x)(\log_2 x')} = 2$ adică $x * x' = 2^{9(\log_2 x')} = 2$. Imediat simetricul este $x' = 2^{\frac{1}{9}} \in H$.

f) Se obține $2^{(\log_2 x)^2} = 2$, adică $(\log_2 x)^2 = 1$ și prin urmare $\log_2 x \in \{-1, 1\}$. Așadar $x \in \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$.