Rezolvare:

a. $AB=\begin{pmatrix}1 & a\\ 4 & 2b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+a^2 & a\\ 4+2ab & 2b\end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 4 & 2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & a\\ a+4 & a^2+2b\end{pmatrix}$.

Atunci $M=AB-BA=\begin{pmatrix}a^2 & 0\\ 2ab-a & a^2\end{pmatrix}$

b. Pentru $a=2$ se va obține $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 2b\end{pmatrix}$, atunci $\det A=2b-8$ de unde se obține ecuația $2b-8=-6 \Leftrightarrow b=2$.

c. Pentru $b=2$ matricea A devine $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 4 & 4\end{pmatrix}$, A inversabilă dacă şi numai dacă $\det A\neq 0$. Cum $\det A=4-4a$, obținem $4-4a\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 1$, de unde rezultă că pentru $b=2$, matricea A este inversabilă pentru $(\forall)a\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

d. $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 4 & 2b\end{pmatrix}$, $\det A=2b-4a$ şi cum $b\neq 2a$, obținem $\det A\neq 0$, deci, matricea A este inversabilă.

Calculăm matricea adjunctă $A^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2b & -a\\ -4 & 1\end{pmatrix}$, atunci $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}A^*=\dfrac{1}{2b-4a}\begin{pmatrix}2b & -a\\ -4 & 1\end{pmatrix}$.

e. Pentru $a=0$ şi $b=\dfrac{1}{2}$, matricele A şi B devin $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\det A=1$ şi $\det B=1$, deci ambele matrice sunt inversabile, $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -4 & 1\end{pmatrix}$, $B^{-1}=B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. În acest caz soluția ecuației matriceale va fi $X=A^{-1}CB^{-1}$, de unde prin calcul se obține $X=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -5 & -17\end{pmatrix}$.

f. Conform rezultatului obținut la punctul a. vom avea $AB=\begin{pmatrix}1+a^2 & a\\ 4+2ab & 2b\end{pmatrix}$ şi $BA=\begin{pmatrix}1 & a\\ a+4 & a^2+2b\end{pmatrix}$.

Identificând elementele din egalitatea $AB=BA$ se obțin relațiile $1+a^2=1$ şi $a+4=4+2ab$ şi $a^2+2b=2b$. Prin calcul se va obține $a=0$ şi $b\in\mathbb{R}$.
Deci, perechile de numere reale căutate sunt de forma $(0;b)$, pentru $b\in\mathbb{R}$.