

Soluție

. a) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{DM}$ și $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NC} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{NC}$

1. b) Din a) avem $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{NC}$, pe de altă parte $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} \Rightarrow$
 $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$

2. a) Din teorema sinusurilor în triunghiul ABC avem: $\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow$

$$\frac{AC}{\frac{2}{3}} = \frac{AB}{\frac{1}{2}} = 12 \Rightarrow AC = 8 \text{ și } AB = 6$$

2. b) Fie D piciorul înălțimii din A . În triunghiul ADC avem: $m(\sphericalangle ADC) = 90^\circ$, $m(\sphericalangle ACD) = 30^\circ$,
 $AC = 8 \Rightarrow AD = 4$ și $CD = 4\sqrt{3}$.

În triunghiul ADB avem: $m(\sphericalangle ADB) = 90^\circ$, $AB = 6$, $AD = 4 \Rightarrow BD = 2\sqrt{5} \Rightarrow$
 $\Rightarrow BC = BD + CD = 2\sqrt{5} + 4\sqrt{3}$.

3. a) $m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = -\frac{4}{3}$, $m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{3}{4} \Rightarrow m_{AC} \cdot m_{BC} = -1 \Rightarrow AC \perp BC$

3. b) $AC \perp BC \Rightarrow \mathcal{A}_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2}$

$$AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ și } BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}_{ABC} = \frac{5 \cdot 10}{2} = 25$$