Soluție

1. a) Pentru $x>0$ rezultă $f(x)=\frac{1}{x+1}+\ln(2x+1)-\ln(2x+3)$. Rezultă $f'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{2}{2x+1}-\frac{2}{2x+3}$,

de unde $f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2(2x+1)(2x+3)}$.

b) Deoarece $f'(x)>0$ rezultă că funcția f este strict crescătoare. Din $0<x<t$ rezultă $f(x)<f(t)$.
Cum $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=0$, rezultă $f(x)<0, \forall x\in(0,\infty)$.

c) $x_{n+1}-x_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\ln\left(n+1+\frac{1}{2}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)$.

Rezultă $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-\ln\frac{2n+1}{2n+3}=f(n)<0$, iar din $x_{n+1}-x_n<0$ rezultă șirul $(x_n)_{n\geq1}$ este strict descrescător.

2. a) Funcția f este o funcție impară prin definiție dacă. $f(-x)=-f(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

Utilizăm schimbarea de variabilă $t=-u$. Rezultă $f(-x)=\int_0^{-x} e^{t^2}dt=-\int_0^x e^{u^2}du=-\int_0^x e^{t^2}dt=f(x)$.

b) Deoarece $e^x>x, \forall x\in\mathbb{R}$, rezultă $e^{t^2}>t^2$. Atunci $\int_0^x e^{t^2}dt>\int_0^x t^2dt$, de unde $\int_0^x e^{t^2}dt>\frac{x^3}{3}$.

Cum $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{3}=\infty$ rezultă $\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^x e^{t^2}dt=\infty$. Deci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

c) $e^{t^2}\leq e^t, \forall t\in[0,1]$.

Rezultă $\int_0^x e^{t^2}dt\leq\int_0^x e^t dt, \forall x\in[0,1]$, deci $f(x)\leq e^x-1, \forall x\in[0,1]$.

Prin urmare $\int_0^1 f(x)dx\leq\int_0^1(e^x-1)dx=e-2$.