Soluție

1.b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-f\left(x\right)\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\dfrac{1}{e}$.

b) Funcția *f* este derivabilă și $f'(x)=\dfrac{\left(x^2+x-1\right)'x-\left(x^2+x-1\right)x'}{x^2}$, de unde $f'(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2}$. Deoarece $f'(x)>0,\forall x\in[1,\infty)$, rezultă că func.ia *f* este strict crescătoare.

c) Funcția *f* fiind strict crescătoare re este injectivă. Cum f este continuă pe $[1,\infty)$, $f(1)=1$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, din monotonia lui f este şi strict crescătoare, rezultă imaginea funcției f este $[1,\infty)$, deci f este surjectivă. Fiind injectivă şi surjectivă *f* este bijectivă.

c) Presupunem că şirul $(g(n))_{n\geq 1}$ este mărginit superior, deci există $\beta\in[1,\infty)$ astfel încât $g(n)\leq\beta,\forall n\geq 1$. Cum funcția *g* este surjectivă, există $\alpha\in[1,\infty)$ astfel încât $g(\alpha)=\beta$. Prin urmare $g(n)\leq g(\alpha),\forall n\geq 1$. Din $g(n)\leq g(\alpha)$, deoarece g este crescătoare rezultă $n\leq\alpha,\forall n\geq 1$, absurd.

2. a) Funcția F trebuie să fie continuă şi derivabilă. Din continuitatea în 1 rezultă $a+b=1$,
iar din derivabilitatea în 1 rezultă $a=0$. Deci $a=0$ și $b=1$.

b) Utilizăm schimbarea de variabilă $\ln x=t$ .Rezultă $\displaystyle\int_1^e\frac{1}{xF(x)}dx=\int_1^e\frac{1}{x\left(1+\ln^2 x\right)}dx=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt$.

Dar $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt=arctgt\,\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$, deci $\displaystyle\int_1^e\frac{1}{xF(x)}dx=\frac{\pi}{4}$.

c) h este de două ori derivabilă, cu derivata de ordinul doi funcție continuă.
Utilizăm integrarea prin părți:
$\displaystyle\int_1^{\pi}h(x)h''(x)\,dx=\int_1^{\pi}h(x)\left(h'(x)\right)'dx=h(x)h'(x)\Big|_1^{\pi}-\int_1^{\pi}\left(h'(x)h'(x)\right)dx$. Deoarece $h(1)=h(\pi)=0$ rezultă $h(x)h'(x)\Big|_1^{\pi}=0$. Deci $\displaystyle\int_a^b h(x)h''(x)\,dx=-\int_a^b\left(h'(x)\right)^2dx\leq 0$.