

Soluție

1.a) Fie $Y = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}; AX = XA \Rightarrow t = x, y = 3z$

1.b) $\det(X) = x^2 - 3y^2 = 0$; Dacă $y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow X = 0_2$. Dacă $y \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 = 3 \Rightarrow \frac{x}{y} \in \{\pm\sqrt{3}\}$,
contradicție.

1.c) Dacă $X = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} c & 3d \\ d & c \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{Z} \Rightarrow XY = \begin{pmatrix} ac + 3bd & 3(bc + ad) \\ bc + ad & ac + 3bd \end{pmatrix}$.

Utilizând metoda inducției matematice, rezultă concluzia.

2.a) $f(1) = 0$

2.b) $\left(\sum_{i=1}^5 x_i\right)^2 - 2\left(\sum_{1 \leq i < j \leq 5} x_i x_j\right) = -5$

2.c) $f(x) = (x-1)(x^4 + 3x^2 + 2x + 2); x^4 + 3x^2 + 2x + 2 = (x^2 + 1)^2 + (x+1)^2 > 0$