

Rezolvare

1. a) $f'(x) = 6x^2 - 6x$, $f'(1) = 0$.

b) $f''(x) = 12x - 6$ și din semnul derivatei a doua se obține că f este concavă pe $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ și convexă pe $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

c) Din studiul semnului derivatei funcției f se obține că f este crescătoare pe $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, descrescătoare pe $(0, 1)$ și crescătoare pe $[1, +\infty)$ și cum $f\left(-\frac{1}{2}\right) = f(1) = 0$ rezultă $f(x) \geq 0$, pentru orice $x \geq -\frac{1}{2}$.

2. a) $\int f(x) dx = e^x + C$

b) $A(\Gamma_h) = \int_0^1 x \cdot e^x dx = (x-1) \cdot e^x \Big|_0^1 = 1$.

c) $1-x \geq x$ pentru orice $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, deci $e^{1-x} - e^x \geq 0$ pentru orice $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ de unde

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (g(x) - f(x)) dx \geq 0.$$