Soluție:

1. a) Calcul direct.

b) Fie $Y = \begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a \end{pmatrix} \in C(A)$, cu $Y^2 = 0_2$.

Obținem sistemul $\begin{cases} a^2 + 5b^2 = 0 \\ ab = 0 \end{cases}$, cu unica soluție $a = b = 0$, deci $Y = 0_2$.

c) Fie $Z = \begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a \end{pmatrix} \in C(A)$, $Z \neq O_2$, cu $a, b \in \mathbb{Q}$.

Presupunem că $\det(Z) = 0$, deci $a^2 - 5b^2 = 0$. Dacă $b = 0$, atunci $a = 0$, deci $Z = 0_2$, fals.
Dacă $b \neq 0$, rezultă că $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$, fals.

2. a) $f\left(\hat{0}\right) + f\left(\hat{1}\right) + f\left(\hat{2}\right) = \hat{3}a + \hat{1} = \hat{1}$.

b) $f = X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{2}$ are singura rădăcină $x = \hat{2}$.

c) Deoarece $grad(f) = 3$, f este ireductibil peste $\mathbb{Z}_3 \Leftrightarrow f$ nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_3$.
Așadar $a \neq \hat{0}$ şi $\hat{1} + a \neq \hat{0}$, deci $a = \hat{1}$.