Rezolvare

1) **a)** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x - \lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arcctg} x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow y = \dfrac{\pi}{2}$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

b) $f'(x) = \dfrac{2}{1+x^2} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ este strict crescătoare.

c) $x_2 = f(0) = -\dfrac{\pi}{2} \to x_1 > x_2$ şi f este strict crescătoare $\Rightarrow (x_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător. $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit inferior de $-\dfrac{3\pi}{2}$, deci conform Teoremei lui Weierstrass este convergent.

2) **a)** g este continuă, deci are primitive, iar derivata unei primitive este pozitivă, deci orice primitivă este strict crescătoare.

b) $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = f(x)x\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{\pi}{12} + \sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1.$

c) $\int_0^1 f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \left(x \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} + \sqrt{1-x^2}\Big|_0^{1-\varepsilon} \right) = \dfrac{\pi}{2} - 1 < \dfrac{\pi}{4}.$