

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

1. $A \in G_f \Leftrightarrow f\left(\frac{m-1}{2}\right) = \frac{5m+1}{4} \Leftrightarrow \frac{m-1}{2} + m = \frac{5m+1}{4} \Leftrightarrow \frac{3m-1}{2} = \frac{5m+1}{4} \Leftrightarrow 6m-2 = 5m+1 \Leftrightarrow m=3.$

2.a. Fie $f(x) = ax^2 + bx + c, a \in \mathbb{R}^*, b, c \in \mathbb{R}.$

$A \in G_f \Leftrightarrow f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$

$V(2; -3) \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} = 2$ și $y = -\frac{\Delta}{4a} = -3.$

Se rezolvă sistemul $\begin{cases} b^2 - 4a = 12a \\ b = -4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 16a^2 - 16a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4 \\ a = 0; a = 1 \end{cases}.$

Dar $a = 0$ nu convine, deci $a=1; b=-4; c=1.$

2.b. $x_1^2 + x_2^2 - 10(x_1 + x_2) + 45 = 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 10(x_1 + x_2) + 45 = 0.$

Folosind relațiile lui Viete : $x_1 + x_2 = m; x_1x_2 = \frac{m^2 - 10m + 45}{2}$ avem $m^2 - (m^2 - 10m + 45) - 10m + 45 = 0,$
adevărat pentru orice valoare reală a lui $m.$

3. Dreapta intersectează parabola asociată într-un singur punct dacă sistemul format din ecuațiile lor are o singură soluție. $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 3 \\ y = mx - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 3 = mx - 1 \\ y = mx - 1 \end{cases}.$

Sistemul va avea o singură soluție dacă ecuația $x^2 - 2x - mx + 3 + 1 = 0$ are

$\Delta = 0 \Leftrightarrow (m+2)^2 - 4^2 = 0 \Leftrightarrow (m-2)(m+6) = 0 \Leftrightarrow m = 2; m = -6$

4.a. Ecuația se scrie sub forma $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{S} = \left\{\frac{1}{2}\right\}.$

4.b. Condițiile de existență pentru logaritmi sunt : $\begin{cases} 2x+1 > 0 \\ x+11 > 0 \end{cases}.$

Folosind proprietățile logaritmilor obținem :

$\lg(2x+1)^2 = \lg(x+11) \Leftrightarrow (2x+1)^2 = x+11 \Leftrightarrow 4x^2 + 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm 13}{8} \Leftrightarrow x_1 = -2; x_2 = \frac{5}{4}.$

Condițiile de existență sunt verificate doar de numărul real $\frac{5}{4}$, ca urmare $\mathbb{S} = \left\{\frac{5}{4}\right\}.$