Soluție

1.a) *f* este continuă pe fiecare dintre intervalele $(-\infty,1)$ şi $(1,\infty)$, deoarece pe fiecare dintre intervalele $(-\infty,1)$ şi $(1,\infty)$ *f* se obține prin operații cu funcții continue. *f* este continuă în 1 dacă $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$.

Deoarece $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1 = f(1)$ rezultă f continuă în 1. Rezultă *f* continuă pe $\mathbb{R}$.

b) Suntem în cazul $\dfrac{0}{0}$. Aplicăm regula lui l´ Hôspital. Rezultă $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x-(x-1)}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{2x(x-1)}$.

Dar $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{2x(x-1)} = -\dfrac{1}{2}$. Deci limita este $-\dfrac{1}{2}$.

c) Deoarece se obține prin operații cu funcții derivabile, funcția f este derivabilă pe $(0,\infty)\setminus\{1\}$.

În plus, $f'(x) = \dfrac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}, \forall x\in(0,\infty)\setminus\{1\}$.

Cum $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\dfrac{1}{2}$, rezultă că f este derivabilă în $x=1$ şi

$f'(1) = \lim\limits_{x\to 1} f'(x) = -\dfrac{1}{2}$.

Prin urmare, $f' : (0,\infty)\to\mathbb{R}$ şi $f'(x) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{1}{x}-\ln x\right)\cdot\dfrac{1}{(x-1)^2}, & x\neq 1 \\ -\dfrac{1}{2}, & x=1 \end{cases}$.

Deoarece $1-\dfrac{1}{x}-\ln x \le 0, \forall x\in(0,\infty)$ rezultă $f'(x)<0, \forall x\in(0,\infty)$, deci funcția f este strict descrescătoare.

2.a) Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă pe $\mathbb{R}$ a lui *f*. Atunci *f* este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $F'(x) = f(x), \forall x\in\mathbb{R}$. Deci $F'(x) = \ln(1+\sin^2 x), \forall x\in\mathbb{R}$. Deoarece $1+\sin^2 x \ge 1$ rezultă $F'(x) = \ln(1+\sin^2 x)\ge 0, \forall x\in\mathbb{R}$. Prin urmare *F* este crescătoare pe $\mathbb{R}$

b) $\int_0^{\pi} f(x)\cos dx = \int_0^{\pi}\ln\left(1+\sin^2 x\right)\cos x\,dx$.

Utilizăm schimbarea de variabilă $\sin x = t$ .Rezultă $\int_0^{\pi} f(x)\cos dx = \int_0^{0}\ln\left(1+t^2\right)dt = 0$.

c) Funcția f, fiind continuă pe $\mathbb{R}$, admite primitive pe $\mathbb{R}$. Fie F o primitivă pe $\mathbb{R}$ a lui f.
Atunci F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $F'(x) = f(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

În plus, $g(x) = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin x} f(t)dt = F(\arcsin x) - F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, de unde rezultă că g este derivabilă pe $(-1,1)$

$g'(x) = \arcsin' x\cdot F'(\arcsin x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, f(\arcsin x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ln\left(1+x^2\right)$. Deci

$g' : (-1,1)\to\mathbb{R}$ şi $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ln\left(1+x^2\right)$.