

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) Legea se scrie: $x \circ y = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(y - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Demonstrăm că $x \circ y \geq \frac{1}{3} \forall x, y \in H$.

Din $x, y \in H \Rightarrow x - \frac{1}{3} \geq 0, y - \frac{1}{3} \geq 0$ deci $9\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(y - \frac{1}{3}\right) \geq 0 \Rightarrow x \circ y \geq \frac{1}{3}$.

b)

$$\left. \begin{array}{l} x \circ a = a \circ x = a, \forall x \in \mathbb{R} \\ x \circ a = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(a - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow 9\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(a - \frac{1}{3}\right) = a - \frac{1}{3}, \forall x \in \mathbb{R}. \Rightarrow a = \frac{1}{3}.$$

c)

$$\left. \begin{array}{l} x \circ b = b \circ x = x, \forall x \in \mathbb{R} \\ x \circ b = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(b - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow 9\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(b - \frac{1}{3}\right) = x - \frac{1}{3}, \forall x \in \mathbb{R}. \Rightarrow b = \frac{4}{9}.$$

d) $\forall x \in H, \exists x' \in H$ astfel ca

$$x \circ x' = x' \circ x = \frac{4}{9} \Rightarrow 9\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x' - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} = \frac{4}{9} \Rightarrow x' = \frac{1}{3} + \frac{1}{81\left(x - \frac{1}{3}\right)}, \forall x \in H \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}. \text{ Se dem. că}$$

$$x' \in H \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\} \Rightarrow A = H \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}.$$

e) Din punctul c) obținem că legea de compoziție „ \circ ” admite ca element neutru pe $b = \frac{4}{9}$. Se verifică prin calcul asociativitatea și comutativitatea legii de compoziție „ \circ ” pe $H \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

Din d) obținem că toate elementele din $H \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ sunt simetrizabile în raport cu legea de compoziție „ \circ ”.

f) $a \circ b = 9\left(a - \frac{1}{3}\right)\left(b - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \Rightarrow \left(a - \frac{1}{3}\right)\left(b - \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{27}$, deci putem alege $a - \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$ și

$$b - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \frac{8}{9}, b = \frac{2}{3}.$$