Rezolvare:

a. Matricea asociată sistemului $A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & a\\ a & 0 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$,

$A^2=\begin{pmatrix}-3 & 2 & a\\ a & 0 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 2 & a\\ a & 0 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9+3a & a-6 & 2\\ 1-3a & 2a+1 & a^2+3\\ a & 5 & a+10\end{pmatrix}$

b. Pentru $a=0$ se va obține $A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$, atunci $A^2=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -6 & 2\\ 1 & 1 & 3\\ 0 & 5 & 10\end{pmatrix}$ de

unde se obține $B=\begin{pmatrix}24 & -16 & 2\\ 1 & 1 & -2\\ -5 & 0 & -5\end{pmatrix}$.

c. $A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & a\\ a & 0 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$, de unde $\det A=a^2+2+3-6a=a^2-6a+5$.

d. Prima ecuație a sistemului este $-3x+2y+az=-2$. Înlocuind $x=2$, $y=-1$ şi respectiv $z=3$, se va obține ecuația având ca necunoscută pe a: $-6-2+3a=-2 \Leftrightarrow 3a=6 \Leftrightarrow a=2$.

e. Sistemul (S) va avea soluție unică (este compatibil determinat) dacă şi numai dacă $\det A\neq 0$ Cum $\det A=a^2-6a+5$ se va obține relația $a^2-6a+5\neq 0 \Leftrightarrow a_1\neq 1, a_2\neq 4$. Aşadar, sistemul va avea soluție unică pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{1;4\}$

f. Pentru $a=2$ sisemul devine (S): $\begin{cases}-3x+2y+2z=-2\\ 2x+z=7\\ x+y+3z=10\end{cases}$, matricea asociată $A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$ cu

$\det A=-3$. În acest caz vom avea $\Delta_x=\begin{vmatrix}-2 & 2 & 2\\ 7 & 0 & 1\\ 10 & 1 & 3\end{vmatrix}=14+20+2-42=-6$,

$\Delta_y=\begin{vmatrix}-3 & -2 & 2\\ 2 & 7 & 1\\ 1 & 10 & 3\end{vmatrix}=-63+40-2-14+30+12=3$, $\Delta_z=\begin{vmatrix}-3 & 2 & -2\\ 2 & 0 & 7\\ 1 & 1 & 10\end{vmatrix}=-4+14+21-40=-9$. Vom

avea $x=\dfrac{\Delta_x}{\det A}=\dfrac{-6}{-3}=2$

$y=\dfrac{\Delta y}{\det A}=\dfrac{3}{-3}=-1$

$z=\dfrac{\Delta_z}{\det A}=\dfrac{-9}{-3}=3$

Atunci mulțimea soluțiilor sistemului (S) este $\{(2;-1;3)\}$