

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție :

$$\text{a) } A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - I_3) = 0$$

$$\text{b) } A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}, 5A = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 5 & 10 & 5 \\ 5 & 5 & 10 \end{pmatrix}, 4I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 5A + 4I_3 = O_3$$

$$\text{c) } A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_3$$

$$A \left(-\frac{1}{4}A + \frac{5}{4}I_3 \right) = -\frac{1}{4}A^2 + \frac{5}{4}A = -\frac{1}{4}(5A - 4I_3) + \frac{5}{4}A = I_3$$

$$\text{d) } \det(A) = 4$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{4}$$

$$\text{e) } A^2 + yA + zI_3 = \begin{pmatrix} 6+2y+z & 5+y & 5+y \\ 5+y & 6+2y+z & 5+y \\ 5+y & 5+y & 6+2y+z \end{pmatrix}$$

$$6+2y+z=0$$

$$5+y=0 \quad \Rightarrow y=-5, z=4$$

$$\text{f) } A = {}^tA$$

$$\det(A) = 4$$

$$\det(aA + {}^tA) = \det(aA + A) = \det[(a+1)A] = (a+1)^3 \det(A) = 4(a+1)^3$$