

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) Calcul elementar.

b) Asociativitatea rezultă din $(x * y) * z = \frac{1}{4}(x+1)(y+1)(z+1) - 1 = x * (y * z)$.

c) Din definiția elementului neutru se obține $e = 1$.

d) Dacă $x = 2p + 1$, $y = 2q + 1$, $p, q \in \mathbb{Z}$, atunci $x * y = \frac{1}{2}(x+1)(y+1) - 1 = 2(p+1)(q+1) - 1 \in H$.

e) Se ține cont de definiția elementelor simetrizabile și pentru $x \in H$ se obține $x' = -1 + \frac{4}{x+1} \in H$. Imediat

$(x+1) \in \{\pm 1, \pm 2 \pm 4\}$ și cum $x, x' \in H$, rezultă $x \in \{-3, 1\}$

f) Cum $x * \frac{1}{x} = \frac{(x+1)^2}{2x} - 1$, atunci $x * \frac{1}{x} - 1 = \frac{(x+1)^2}{2x} - 2 = \frac{(x-1)^2}{2x} \geq 0$.