

**Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**Rezolvare.**

a)  $A + 3I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$

b)  $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2 \Rightarrow A^3 = O_2$

$$\Rightarrow I_2 + 2A + 3A^2 + 4A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

c)  $B$  inversabilă  $\Leftrightarrow \det B \neq 0$ ,  $\det B = \begin{vmatrix} b+1 & 1 \\ -1 & b-1 \end{vmatrix} = b^2$ ,  $b \in \mathbb{R}^* \Rightarrow B$  inversabilă.

d)  $aC$  inversa matricei  $A + 2I_2 \Leftrightarrow (aC)(A + 2I_2) = (A + 2I_2)(aC) = I_2$ ,  $A + 2I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$aC(A + 2I_2) = a \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, (A + 2I_2)aC = a \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$a \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = \frac{1}{4}.$$

e)  $B^3 = (A + bI_2)^3$ ,  $AI_2 = I_2A \Rightarrow B^3 = A^3 + 3bA^2 + 3b^2A + b^3I_2$ . Din b)  $\Rightarrow A^3 = A^2 = O_2 \Rightarrow B^3 = 3b^2A + b^3I_2$ .

f)  $AB = A(A + bI_2) = A^2 + bA \stackrel{b)}{\Rightarrow} AB = bA$ ,  $BA = bA \Rightarrow AB + BA = 2bA \Rightarrow 2bA = 8A \Rightarrow b = 4$ .