

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție:

a) $f'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} = px + \frac{q}{\sqrt{x}}, \forall x > 0$ și deci $p = 2, q = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$

b) $\int_1^2 f(x^2) dx = \int_1^2 (x^4 + x) dx$, de unde $\int_1^2 f(x^2) dx = \frac{77}{10} < 8$

c) $F'(x) = f(x) > 0, \forall x > 0$, deci F este strict crescătoare pe $(0, \infty)$ și astfel $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$ (deoarece $8 < 9$) conduce la $F(\sqrt{2}) < F(\sqrt[3]{3})$.

d) $\int_1^3 h_{p,0}(x) dx = \int_1^3 pxdx = 4p$; $\int_1^3 h_{p,0}(x) dx = m \Rightarrow \forall m \in \mathbb{Z}, \exists p = \frac{m}{4} \in \mathbb{Q}$ cu proprietatea din enunț

e) De exemplu, $g(x) = x^3$ nu este constantă și $\int_{-1}^1 g(x) dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^1 = 0 \in \mathbb{Z}$

f) Egalitatea conduce la $p \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^4 = q \cdot 2\sqrt{x} \Big|_1^4$. Se ajunge la $15p = 4q$. E suficient să luăm, de exemplu, $p = 4, q = 15 \in \mathbb{Z}^*$