

**Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**Rezolvare**

a) Calcul elementar.

b) Din  $x, y \in G$ , rezultă  $(x^2 - 4)(y^2 - 4) > 0$  și imediat  $x * y = \sqrt{(x^2 - 4)(y^2 - 4) + 4} > 2$

c) Asociativitatea rezultă din  $(x * y) * z = \sqrt{(x^2 - 4)(y^2 - 4)^2(z^2 - 4) + 4} = x * (y * z)$ .

d) Din definiția elementului neutru ( $\exists e \in G$  astfel încât  $x * e = e * x = x$ ,  $\forall x \in G$ ) se obține

$$\sqrt{(x^2 - 4)(e^2 - 4) + 4} = x \text{ și imediat } e = \sqrt{5}.$$

e) Rezultă din punctele precedente și din faptul că orice element  $x \in G$  admite simetricul

$$x' = \sqrt{4 + \frac{1}{x^2 - 4}} \in G.$$

f) Avem ecuația  $\sqrt{(x^2 - 4)(y^2 - 4) + 4} = 8$ , de unde  $(x^2 - 4)(y^2 - 4) = 60$ . Cum  $x, y \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2\}$  se

obține 
$$\begin{cases} x^2 - 4 = d \\ y^2 - 4 = \frac{60}{d} \end{cases}, \text{ unde } d \mid 60. \text{ Cum } x^2 = d + 4, d \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\} \text{ convine doar}$$

$d \in \{5, 12, 60\}$ . Imediat  $x \in \{3, 4, 8\}$  iar  $y \in \{4, 3, \sqrt{5}\}$ . Deci mulțimea soluțiilor ecuației este  $\{(3; 4), (4; 3)\}$