

Soluție

1. a) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$. $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{BD} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BD} \Rightarrow \overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{BC}}{3}$

1. b) $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ și $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CF} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow$

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$$

2. a) În triunghiul ABC avem: $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$ și $m(\sphericalangle B) = 60^\circ \Rightarrow AB = \frac{BC}{2} = 6$ și $AC = AB\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$.

În triunghiul ABD $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$ și $m(\sphericalangle ABD) = 45^\circ \Rightarrow$ triunghiul ABD este dreptunghic isoscel, deci $AD = AB = 6 \Rightarrow CD = AC - AD = 6\sqrt{3} - 6$.

2. b) Din teorema cosinusului în triunghiul BDC avem $\cos(\sphericalangle DBC) = \frac{BD^2 + BC^2 - CD^2}{2 \cdot BD \cdot BC}$

Din triunghiul ABD avem $BD = AB\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \Rightarrow \cos(\sphericalangle DBC) = \frac{72 + 144 - 108 - 36 + 72\sqrt{3}}{2 \cdot 6\sqrt{2} \cdot 12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

3. a) $m_{OA} = \frac{y_A}{x_A} = \frac{1}{2} \Rightarrow m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{1}{2} \Rightarrow m_{OA} = m_{BC} \Rightarrow OA \parallel BC$

3. b) $m_{OC} = \frac{y_C}{x_C} = -\frac{3}{5}$ și $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -\frac{3}{5} \Rightarrow m_{OC} = m_{AB} \Rightarrow OC \parallel AB \Rightarrow OABC$ este paralelogram.