Soluție: **1.** **a)** $\text{rang}(A+I_2)=2$.

b) Se demonstrează prin calcul direct.

c) Presupunem că ecuația are soluția $Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Atunci, $A\cdot Y=Y\cdot A$ şi din **b)** deducem că există $x,y\in\mathbb{C}$, astfel încât $Y=\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$. Cum $\det(Y)=0$, obținem $x=0$ şi apoi $Y^2=0_2$, fals.

2. a) Calcul direct.

b) Calcul direct.

c) Se demonstrează prin inducție că

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ \forall\, x_1,x_2,...,x_n\in\mathbb{R},\ x_1*x_2*...*x_n=(x_1+1)(x_2+1)\cdot...\cdot(x_n+1)-1.$$

Obținem $1*\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*...*\frac{1}{2008}=2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot...\cdot\frac{2009}{2008}-1=2008$.