Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) $f(1)=\frac{\pi}{4},\quad f'(1)=\frac{1}{2}$

$y-\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}(x-1)$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-f(x)}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-f'(x)}{3x^2}=\frac{1}{3}$

c) $g(1)=g(0), deci\ exista\ c\in(0;1)\ astfel\ incat\ g'(c)=0$

$g''(x)>0, g'\ \ strict\ crescatoare, deci\ c\ este\ unic$

$c\ punct\ de\ extrem$

2.a) $I_1=\int_0^1 x^2\sin x=x^2(-\cos x)\Big|_0^1+2\int_0^1 x(\sin x)'\,dx$

$=-\cos 1+2x\sin x|_0^1-2\int_0^1\sin x$

$=-\cos 1+2\sin 1+2\cos 1-2=2\sin 1+\cos 1-2$

b) $x^{2n}>x^{2n+2}\Rightarrow I_n>I_{n+1}$

$\sin x>0\Rightarrow I_n>0$

$(I_n)_{n\geq 1}$ descrescator si marginit $\Rightarrow (I_n)_{n\geq 1}$ convergent

c) $I_n=\int_0^1 x^{2n}(-\cos x)'dx=-x^{2n}\cos x\ |_0^1\ +2n\int_0^1 x^{2n-1}(\sin x)'$

$=-\cos 1+2nx^{2n-1}\sin x\ |_0^1\ -2n(2n-1)I_{n-1}=$

$=2n\sin 1-\cos 1-2n(2n-1)I_{n-1}$