Soluție

1.a) Cum $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{1+x^2}=0$ și $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to\infty} arctgx=\dfrac{\pi}{2}$, rezultă

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)g(x)\right)=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0\cdot\dfrac{\pi}{2}=0$.

b) *f* este derivabilă și $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2},\forall x\in\mathbb{R}$.

Semnul derivatei:

x		-1		1	
$f'(x)$	- - - - - - - -	0	+++++++++	0	- - - - - - - - - - -

Ținând cont de semnul derivatei, rezultă că – 1 este punct de minim local, iar 1 este punct de maxim local.

c) Considerăm funcția $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(x)=f(x)-g(x)$. Rezultă $h'(x)=-\dfrac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$. Deoarece

$h'(x)<0,\forall x\in(0,\infty)$, rezultă că h este descrescătoare pe $(0,\infty)$. Deci

$h(x)<h(0),\forall x\in(0,\infty)\Rightarrow h(x)<0,\forall x\in(0,\infty)\Rightarrow\dfrac{x}{1+x^2}<arctgx,\forall x\in(0,\infty)$

2.a) Funcția *f* este continuă pe $[0,1]$, deci este integrabilă pe acest interval.

Funcția $g:[1,2]\to\mathbb{R}, g(x)=x\ln x$ este continuă, deci este integrabilă pe $[1,2]$.

Deoarece $f(x)=g(x),\forall x\in[1,2]\setminus\{1\}$, rezultă că *f* este integrabilă pe $[1,2]$.

Fiind integrabilă pe $[0,1]$ și pe $[1,2]$, rezultă f integrabilă pe $[0,2]$.

b) Fie *F* o primitivă a funcției $\varphi:[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $\varphi(t)=t\ln t$. Atunci: $\int_1^x t\ln t\,dt=F(x)-F(1)$.

Rezultă $\lim\limits_{x\searrow 1}\dfrac{\int_1^x t\ln t\,dt}{x-1}=\lim\limits_{x\searrow 1}\dfrac{F(x)-F(1)}{x-1}=F_d'(1)$. Deoarece $F_d'(1)=\varphi(1)=0$ rezultă că limita este egală cu 0.

c) În cazul respectiv, deoarece *f* este continuă, ea admite o primitivă *F* și $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$.

Fie $t\in(0,2)$. Considerăm funcția. $\theta:[0,2]\to\mathbb{R}, \theta(x)=F(x)-f(t)x$

Funcția $\theta:[0,2]\to\mathbb{R}, \theta(x)=F(x)-f(t)x$ este derivabilă și $\theta'(x)=F'(x)-f(t)=f(x)-f(t)$.

Deoarece f este strict crescătoare, rezultă că θ' este strict negativă la stânga lui *t*, respectiv strict pozitivă la dreapta lui *t*. Aceasta probează că funcția θ este strict descrescătoare la stânga lui *t*, respectiv strict crescătoare la dreapta lui *t*. Prin urmare θ nu este injectivă, deci există $a,b\in[0,1], a\neq b$, astfel încât

$\theta(a)=\theta(b)$, cea ce implică $F(a)-f(t)a=F(b)-f(t)b\Rightarrow F(a)-F(b)=(a-b)f(t)$.