Rezolvare:

a. $A = M + aI_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ -4 & a-2 \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ -4 & a-2 \end{pmatrix}$, atunci $\det A = (a+2)(a-2)+4 = a^2 - 4 + 4 = a^2$ de unde se obține ecuația $a^2 = 16 \Leftrightarrow a_1 = -4, a_2 = 4$.

c. $A = \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ -4 & a-2 \end{pmatrix}$, $\det A = a^2$ şi cum $a \neq 0$ matricea A este inversabilă. Calculăm matricea adjunctă $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 & -1 \\ 4 & a+2 \end{pmatrix}$, atunci $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \frac{1}{a^2}\begin{pmatrix} a-2 & -1 \\ 4 & a+2 \end{pmatrix}$.

d. Pentru $a = 1$ matricea devine $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$, $\det A = 1 \neq 0$, A este inversabilă şi vom obține $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. În acest caz soluția ecuației matriceale va fi $X = A^{-1}M$, de unde prin calcul se obține $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$

e. $A = \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ -4 & a-2 \end{pmatrix}$, de unde $Tr(A) = a+2+a-2 = 2a$ şi $\det A = a^2$. Calculăm $A^2 = \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ -4 & a-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ -4 & a-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+4a & 2a \\ -8a & a^2-4a \end{pmatrix}$, calculăm $Tr(A)\cdot A - \det A \cdot I_2 = 2a\begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ -4 & a-2 \end{pmatrix} - a^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+4a & 2a \\ -8a & a^2-4a \end{pmatrix}$, de unde se va obține identitatea $A^2 = Tr(A)\cdot A - \det A \cdot I_2$.

f. $A^3 = a^2(3M + aI_2)$. Din enunț se cunoaşte că $A = M + aI_2$, de unde $A^3 = (M + aI_2)^3$. Folosind proprietatea de comutativitate a înmulțirii matricei unitate cu o altă matrice şi proprietățile înmulțirii matricelor cu scalari, se va obține: $A^3 = M^3 + 3a \cdot M^2 + 3a^2 \cdot M + a^3 \cdot I_2$. Calculăm $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, de unde $M^3 = M^2 \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi înlocuind în relația anterioară, se va obține: $A^3 = 3a^2 \cdot M + a^3 \cdot I_2 = a^2(3\cdot M + a\cdot I_2) \Rightarrow A^3 - a^2(3\cdot M + a \cdot I_2) = O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.