

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)+1} = \sqrt{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1 + 1} = x * y, \forall x, y \in G$

b)
$$\left. \begin{array}{l} x \in (1, +\infty) \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x^2 - 1 > 0 \\ y \in (1, +\infty) \Rightarrow y > 1 \Rightarrow y^2 - 1 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1 > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2} > 1 \Rightarrow x * y \in (1, +\infty)$$

c) $x * 2 = \sqrt{3(x^2-1)+1} \Rightarrow 3(x^2-1)+1=4 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\sqrt{2}$

d) $(x * y) * z = \sqrt{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2} * z = \sqrt{x^2y^2z^2 - x^2z^2 - y^2z^2 - x^2y^2 + x^2 + y^2 + z^2} = x * (y * z), \forall x, y, z \in G$

e) Căutăm $e \in (1, +\infty)$ astfel încât $x * e = e * x = x, \forall x \in G$. $x * e = \sqrt{x^2e^2 - x^2 - e^2 + 2} \Rightarrow e = \sqrt{2} \in G$.

f) Fie $x \in G \Rightarrow x \in (1, +\infty)$. Caut $x' \in (1, +\infty)$ astfel ca $x * x' = \sqrt{2}$. $x * x' = \sqrt{x^2x'^2 - x^2 - x'^2 + 2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2x'^2 - x^2 - x'^2 + 2} = \sqrt{2} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x'^2(x^2 - 1) = x^2 \\ x \in (1, +\infty) \Rightarrow x^2 - 1 \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x'^2 = \frac{x^2}{x^2 - 1}, x \in (1, +\infty) \\ x' > 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}, x \in (1, +\infty). \text{ Verific } x' \in G \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} > 1 \Leftrightarrow x > \sqrt{x^2 - 1} \Leftrightarrow 0 > -1 \text{ „A”}.$$

Deci $\forall x \in (1, +\infty), (\exists) x' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}, x' \in (1, +\infty)$ astfel că $x * x' = x' * x = \sqrt{2}$.