Soluție

1.a. $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 32+4+4-2-16-16=6.$

b. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 4 \\ a^2 & 4 & 16 \end{vmatrix} = (2-a)(4-a)(4-2) = 2(a-2)(a-4)$**.** Sistemul admite numai soluția unică dacă $\Delta \neq 0$, deci $a \in \mathbb{R} - \{2,4\}$.

c. Deoarece $\Delta = 2(a-2)(a-4) \neq 0 \Rightarrow x = y = z = 0.$

2.a. Avem $f(1)+f(-1)=2008 \Leftrightarrow 2+2c=2008 \Leftrightarrow c=1003.$

b. Din $\left.\begin{array}{r} f(0)=-2 \\ f(1)=a+b-2+1=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow a+b=-1.$ Cum $x_1=2$ este solutie $\Rightarrow$ $8a+2b=-14$ de unde

$\Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \\ c=-2 \end{cases}.$

c. Pentru $a=-2,\ b=1$ și $c=-2$ avem $x^4-2x^3+x-2=\left(x^2-x+1\right)\left(x^2-x-2\right)$ care are rădăcinile

$x_1=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}, x_2=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2},\ x_3=-1$ și $x_4=2.$