**Soluție**

**1.a)** $x_{n+1} = a \cdot x_n - b \cdot y_n$ , $y_{n+1} = b \cdot x_n + a \cdot y_n$. Deci $x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = \left(a^2 + b^2\right) \cdot \left(x_n^2 + y_n^2\right)$

**1.b)** Şirurile $\left(x_n\right)_n , \left(y_n\right)_n$ $\left(x_n\right)_n , \left(y_n\right)_n$ sunt mărginite dacă şi numai dacă şirul $\left(d_n\right)_n , d_n = x_n^2 + y_n^2 , \forall n \in \mathbb{N}$ este mărginit.

$d_{n+1} = \left(a^2 + b^2\right) \cdot d_n$ deci $d_n = \left(a^2 + b^2\right)^n \cdot \left(x_0^2 + y_0^2\right)$. Dacă $a^2 + b^2 \le 1$ atunci $d_n \le x_0^2 + y_0^2 , \forall n \in \mathbb{N}$

Dacă $a^2 + b^2 > 1$ şirul $(d_n)$ este nemărginit.

**1.c)** $A = 2 \cdot \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_n = 2^n \cdot \left(x_0 \cdot \cos\frac{n\pi}{3} - y_0 \cdot \sin\frac{n\pi}{3}\right)$

De aici rezultă relația cerută.

**2.a)** $A \ne I_3, A^2 \ne I_3, A^3 \ne I_3, A^4 = I_3 ; A^{4n} = I_3, \forall n \in \mathbb{N}$. $A^{4n+1} = A, A^{4n+2} = A^2, A^{4n+3} = A^3$.

De unde rezultă concluzia.

**2.b)** $G = \left\{I_3, A, A^2, A^3\right\}$ formează un grup .Se arată că $A^i \cdot A^j \in G, i, j \in \{0,1,2,3\}$

sau se scrie tabla operației.

**2.c)** $\left(I_3 + A + A^2 + A^3\right) + \left(I_3 + A + A^2 + A^3\right) + ... + \left(I_3 + A + A^2 + A^3\right) + I_3 =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2009 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(M\right) = 2009$$