Rezolvare:

a. $A = M + 2a \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + 2a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+3 & -9 \\ 1 & 2a-3 \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} 2a+3 & -9 \\ 1 & 2a-3 \end{pmatrix}$, atunci $\det A = (2a+3)(2a-3) + 9 = 4a^2 - 9 + 9 = 4a^2$ de unde se obține ecuația $4a^2 = 16 \Leftrightarrow a_1 = -2, a_2 = 2$.

c. $A = \begin{pmatrix} 2a+3 & -9 \\ 1 & 2a-3 \end{pmatrix}$, $\det A = 4a^2$ şi cum $a \neq 0$ matricea A este inversabilă. Calculăm matricea adjunctă $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-3 & 9 \\ -1 & 2a+3 \end{pmatrix}$, atunci $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \frac{1}{4a^2}\begin{pmatrix} 2a-3 & 9 \\ -1 & 2a+3 \end{pmatrix}$.

d. Pentru $a = \frac{1}{2}$ matricea devine $A = \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\det A = 1 \neq 0$, A este inversabilă şi vom obține $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. În acest caz soluția ecuației matriceale va fi $X = A^{-1}M$, de unde prin calcul se obține $X = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

e. $A = \begin{pmatrix} 2a+3 & -9 \\ 1 & 2a-3 \end{pmatrix}$, de unde $Tr(A) = 2a+3+2a-3 = 4a$ şi $\det A = 4a^2$. Calculăm $A^2 = \begin{pmatrix} 2a+3 & -9 \\ 1 & 2a-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2a+3 & -9 \\ 1 & 2a-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a^2+12a & -36a \\ 4a & 4a^2-12a \end{pmatrix}$, calculăm

$Tr(A) \cdot A - \det A \cdot I_2 = 4a\begin{pmatrix} 2a+3 & -9 \\ 1 & 2a-3 \end{pmatrix} - 4a^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+12a & -36a \\ 4a & a^2-12a \end{pmatrix}$, de unde se va obține identitatea $A^2 = Tr(A) \cdot A - \det A \cdot I_2$.

f. $A^3 = a^2(3M + aI_2)$. Din enunț se cunoaşte că $A = M + aI_2$, de unde $A^3 = (M + aI_2)^3$. Folosind proprietatea de comutativitate a înmulțirii matricei unitate cu o altă matrice şi proprietățile înmulțirii matricelor cu scalari, se va obține: $A^3 = M^3 + 3a \cdot M^2 + 3a^2 \cdot M + a^3 \cdot I_2$. Calculăm $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, de unde $M^3 = M^2 \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi înlocuind în relația anterioară, se va obține: $A^3 = 3a^2 \cdot M + a^3 \cdot I_2 = a^2(3 \cdot M + a \cdot I_2)$. **Aşadar,** $A^3 - a^2(3M + aI_2) = O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$