

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $xI_2 = B - A \Rightarrow \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 2.$

b) $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -32 \\ 8 & 45 \end{pmatrix}, 8A + 5I_2 = \begin{pmatrix} -8 & -32 \\ 8 & 40 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -32 \\ 8 & 45 \end{pmatrix} \Rightarrow$
 $B^2 = 8A + 5I_2.$

c) $AB = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -24 \\ 6 & 31 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -24 \\ 6 & 31 \end{pmatrix} \Rightarrow$
 $AB = BA, A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \Rightarrow A \in C.$

d) $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \Rightarrow AX = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-4z & -y-4t \\ x+5z & y+5t \end{pmatrix} \Rightarrow$
 $\begin{pmatrix} -x-4z & -y-4t \\ x+5z & y+5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x-4z=1 \\ x+5z=1 \\ -y-4t=-4 \\ y+5t=7 \end{cases} \Rightarrow x=-9, y=-8, z=2, t=3 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -9 & -8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$

e) $\det A = -5 + 4 = -1,$
 $\begin{vmatrix} \sqrt{2}-\sqrt{3} & \sqrt{3}-2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2}-2\sqrt{3} & \sqrt{3}-2\sqrt{2} \end{vmatrix} = \sqrt{6} - 4 - 3 + 2\sqrt{6} + (\sqrt{3}-2\sqrt{2})(\sqrt{2}+2\sqrt{3}) = 3\sqrt{6} - 7 + 2 - 3\sqrt{6} = -5 \Rightarrow$
 $\Rightarrow -1 = -5a \Rightarrow a = \frac{1}{5}.$

f) $A + xB = \begin{pmatrix} x-1 & -4x-4 \\ x+1 & 7x+5 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\det(A + xB) = \begin{vmatrix} x-1 & -4x-4 \\ x+1 & 7x+5 \end{vmatrix} = (x-1)(7x+5) - (-4x-4)(x+1) = 11x^2 + 6x - 1 \Rightarrow \text{valoarea minimă este}$$

$$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{80}{44} = -\frac{20}{11}.$$