Soluție

1. a) $f'(x)=\left(x-2\ln x\right)'=x'-\left(2\ln x\right)'\Rightarrow f'(x)=\dfrac{x-2}{x},\ \forall x\geq 1$.

b) $f'(x)\overset{cf.a)}{=}\dfrac{x-2}{x}=0\Rightarrow x-2=0\Rightarrow x=2\in[1,+\infty)$ .Din tabelul de variație rezultă că $A(2;2-2\ln 2)$ este punct de minim şi deci f este descrescătoare pe intervalul $[1,2]$ şi crescătoare pe intervalul $[2,+\infty)$.

c) Ținând cont că pentru orice $x\in\left[1,\sqrt{2}\right]\subset[1,2]$ avem valabile inegalitățile $1\leq x\leq x^2\leq 2$ și că funcția f este descrescătoare pe intervalul $[1,2]$ $\Rightarrow f(x)\geq f\left(x^2\right)$, câtă vreme avem $x\in\left[1,\sqrt{2}\right]\subset[1,2]$ și $x^2\in[1,2]$.

Deci $f(x)\geq f\left(x^2\right)\Rightarrow x-2\ln x\geq x^2-2\ln x^2\Rightarrow 2\ln x\geq x^2-x$.

2. a) $I_0=\displaystyle\int_2^3\frac{1}{x^2-1^2}\,dx=\frac{1}{2\cdot 1}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_2^3=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{2}{4}-\ln\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

b) $I_1=\displaystyle\int_2^3\frac{x}{x^2-1}\,dx=\frac{1}{2}\int_2^3\frac{2x}{x^2-1}\,dx\ \underset{u'(x)=2x}{\overset{u(x)=x^2-1}{=}}\ \frac{1}{2}\int_2^3\frac{u'(x)}{u(x)}\,dx=\frac{1}{2}\ln\left|u(x)\right|\Big|_2^3=\frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$

c) $I_{n+2}-I_n=\displaystyle\int_2^3\frac{x^{n+2}}{x^2-1}dx-\int_2^3\frac{x^n}{x^2-1}dx=\int_2^3\left(\frac{x^{n+2}}{x^2-1}-\frac{x^n}{x^2-1}\right)dx=\int_2^3\frac{x^n\left(x^2-1\right)}{x^2-1}dx=$

$=\displaystyle\int_2^3 x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Bigg|_2^3=\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}$.