Soluție

a) $f'(x)=1-\frac{e}{x}=\frac{x-e}{x}, \forall x\in(0,+\infty)$

b) $\lim\limits_{x\to e}\frac{f(x)-f(e)}{x-}=f'(e)=0$

c) $f'(x)=0\Rightarrow x=e$

$x\in(0,e]\Rightarrow f'(x)\le 0\Rightarrow f$ descrescătoare

$x\in[e,+\infty)\Rightarrow f'(x)\ge 0\Rightarrow f$ crescătoare

d) $x\in(0,e], f$ descrescătoare $\Rightarrow f(x)\ge f(e)\Rightarrow f(x)\ge 0$

$x\in[e,+\infty), f$ crescătoare $\Rightarrow f(x)\ge f(e)\Rightarrow f(x)\ge 0$

$\Rightarrow f(x)\ge 0, x\in(0,+\infty)$

e) Presupunem $e^x\ge x^e, x\in(0,+\infty)$.Prin logaritmarea inegalității obținem

$\ln e^x\ge \ln x^e\Leftrightarrow x\ge e\ln x\Leftrightarrow x-e\ln x\ge 0$

Cum $f(x)\ge 0$ adevărat, pentru $x\in(0,+\infty)$ conform punctului d)

$\Rightarrow e^x\ge x^e, x\in(0,+\infty)$

f) $\frac{-x^2+3x+10}{x^2-x+4}\ge 0$

$x^2-x+4>0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow -x^2+3x+10\ge 0\Rightarrow x\in[-2,5]$

$A=[-2,5]\Rightarrow A$ este mărginită