Soluție

1. a) Avem $f'(x)=\left(\left(x^2-3x-3\right)e^x\right)'=\left(x^2-3x-3\right)'e^x+\left(x^2-3x-3\right)\left(e^x\right)'=$

$=(2x-3)e^x+\left(x^2-3x-3\right)e^x=\left(x^2-x-6\right)e^x, \forall x\in\mathbb{R}$.

b) Avem $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-3x-3\right)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x-3}{e^{-x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-3}{-e^{-x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}}=-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{-e^{-x}}=0$.

Deci dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală la G_f către $-\infty$.

c) Cerința este echivalentă cu a arăta că panta tangentei la grafic în punctul $x_0=-2$ este 0, adică $f'(-2)=0$.

Avem într-adevăr $f'(x)\overset{cf.a)}{=}\left(x^2-x-6\right)e^x$.Prin urmare $f'(-2)=\left((-2)^2-(-2)-6\right)e^{-2}=0$.

2. a) f este continuă pe $(-\infty,0)$ și pe $(0,+\infty)$ (operații cu funcții cont.). Studiem continuitatea în $x_0=0$:

$f_s(0)=\lim\limits_{x\nearrow 0}(x+2)=2;\ f_d(0)=\lim\limits_{x\searrow 0}\left(e^x+1\right)=2;\ f(0)=e^0+1=2\Rightarrow f$ este continuă și în $x_0=0$. Prin urmare f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci admite primitive.

b) $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int\limits_{-1}^{0}(x+2)\,dx+\int\limits_{0}^{1}\left(e^x+1\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_{-1}^{0}+\left(e^x+x\right)\Big|_0^1=e+\frac{3}{2}$.

c) $x\in[0,1]\Rightarrow x^2\geq 0\Rightarrow f\left(x^2\right)=e^{x^2}+1$. Deci $\int\limits_0^1 x\cdot f\left(x^2\right)dx=\int\limits_0^1 x\cdot\left(e^{x^2}+1\right)dx=\int\limits_0^1 x\cdot e^{x^2}\,dx+\int\limits_0^1 x\,dx=$

$\overset{u(x)=x^2}{\underset{u'(x)=2x}{=}}\ \frac{1}{2}\int\limits_0^1 u'(x)\cdot e^{u(x)}\,dx+\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}\cdot e^{u(x)}\Big|_0^1+\frac{1}{2}=\frac{e}{2}$.