Soluție

1.a) Deoarece $f_2(x)=x^2+\ln x$, rezultă $f_2'(x)=2x+\frac{1}{x}>0,\forall x\in(0,\infty)$. Deci f_2 strict crescătoare pe intervalul $(0,\infty)$.

b) Cum $f_n\left(\frac{1}{e}\right)\cdot f_n(1)=\left(\frac{1}{e^n}-1\right)\cdot 1<0$ rezultă că ecuația $f_n(x)=0$ are cel puțin o rădăcină reală, situată în intervalul $\left(\frac{1}{e},1\right)$. Cum f_n este strict crescătoare rădăcina este unică.

c) Rezultă $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{f_2(x)-1}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{x^2+\ln x-1}-\frac{1}{x-1}\right)$.

Pentru calcul limitei $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{x^2+\ln x-1}-\frac{1}{x-1}\right)$ se utilizează schimbarea de variabilă

$y=x-1$. Se obține $\lim\limits_{y\to 0}\left(\frac{3}{(y+1)^2+\ln(y+1)-1}-\frac{1}{y}\right)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y-y^2-\ln(y+1)}{y^3+2y^2+y\ln(y+1)}$

şi se aplică regula lui l´ Hôspital.

Rezultă $\lim\limits_{y\to 0}\frac{y-y^2-\ln(y+1)}{y^3+2y^2+y\ln(y+1)}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{-2y-\frac{y}{y+1}}{3y^2+4y+\ln(y+1)+\frac{y}{y+1}}$, de unde

$$\lim_{y\to 0}\frac{-2-\frac{1}{y+1}}{3y+4+\frac{\ln(y+1)}{y}+\frac{1}{y+1}}=-\frac{3}{5}$$

2. a) Considerăm funcțiile, $g:[-2\pi,0]\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^3$ şi $H:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $h:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$, $h(x)=1+\sin x$.
Deoarece $f(x)=g(x),\forall x\in[-2\pi,0]\setminus\{0\}$ şi g este integrabilă pe $[-2\pi,0]$ rezultă f integrabilă pe $[-2\pi,0]$.
Analog, deoarece $f(x)=h(x),\forall x\in[0,2\pi]$ şi h este integrabilă pe $[0,2\pi]$ rezultă f integrabilă pe $[0,2\pi]$.
Prin urmare f este integrabilă pe $[-2\pi,0]\cup[0,2\pi]=[-2\pi,2\pi]$.

b) $\int_{-1}^{\pi}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{\pi}f(x)dx$

Cum $\int_{-1}^{0}f(x)dx=\int_{-1}^{0}x^3dx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{0}=-\frac{1}{4}$ şi $\int_{0}^{\pi}f(x)dx=\int_{0}^{\pi}(1+\sin x)dx=\left.(x-\cos x)\right|_{0}^{\pi}=\pi+1$,

rezultă $\int_{-1}^{\pi}f(x)dx=\pi-\frac{3}{4}$

c) Inducție matematică.

Cum $\int_{0}^{2\pi}(1+\sin x)dx=\left.(x-\cos x)\right|_{0}^{2\pi}=2\pi$, rezultă $\int\limits_{0}^{2\pi}f(x)dx\le 2\pi$

Presupunem $\int_{0}^{2\pi}f^{n-1}(x)dx\le 2^{n-1}\pi$ şi demonstrăm că $\int_{0}^{2\pi}f^{n}(x)dx\le 2^{n}\pi$

Deoarece $0\le 1+\sin x\le 2$ şi $\sin x\le 1$ rezultă $(1+\sin x)^{n-1}\le 2^{n-1}$ şi

$(1+\sin x)^{n-1}\sin x\le(1+\sin x)^{n-1}$, rezultă

$\int_0^{2\pi} f^n(x)dx = \int_0^{2\pi}(1+\sin x)^{n-1}(1+\sin x)dx =$

$= \int_0^{2\pi}(1+\sin x)^{n-1}dx + \int_0^{2\pi}(1+\sin x)^{n-1}\sin x dx \le 2^{n-1}\pi + 2^{n-1}\pi = 2^n\pi$.