Rezolvare

1. Funcția f este strict crescătoare ,dacă $o < a$ .Dar $f(a)=5 \Leftrightarrow a^2+1=5 \Leftrightarrow a^2=4 \Leftrightarrow |a|=2$.
Cum a trebuie să fie strict pozitiv ,avem $a=2$.

2.a) $f(x)=(x-3)^2 \Rightarrow f(3)=0$
Ca urmare produsul este zero.

b) $\begin{cases} y=3x+1 \\ x^2-(3x+1)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x+1 \\ x^2-3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ x=0 \end{cases} sau \begin{cases} y=10 \\ x=3 \end{cases}$ deci $\mathbb{S}=\{(0,3),(3,10)\}$

3.Se știe că funcția de gradul doi cu coeficientul lui x^2 strict pozitiv este strict descrescătoare pe intervalul $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right)$,stict crescătoare pe $\left(-\frac{b}{2a},+\infty\right)$,calculăm $-\frac{b}{2a}=1$.

Deci pe intervalul $(1,+\infty)$ funcția f este strict crescătoare.

4.a) Condiția de existență este:$1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$.
Notăm $\sqrt[3]{x+1}=a, a\in\mathbb{R} \Rightarrow x=a^3-1$, (*)

$\sqrt{1-x}=b, b\geq 0 \Rightarrow x=1-b^2$, (**)

(*),(**)$\Rightarrow a^3-1=1-b^2$. Dar $a=b$ atunci avem
$a^3-1=1-a^2 \Leftrightarrow (a-1)(a^2+a+1)=(1-a)(1+a)$
$\Leftrightarrow (a-1)(a^2+a+1+1+a)=0 \Leftrightarrow (a-1)\left((a+1)^2+1\right)=0 \Leftrightarrow a=1$, deoarece $(a+1)^2+1\geq 1, \forall a\in\mathbb{R}$.

Prin urmare $\sqrt[3]{x+1}=1 \Leftrightarrow x+1=1 \Leftrightarrow x=0, 0\in(-\infty,1] \Rightarrow \mathbb{S}=\{0\}$

b)Alegem acele valori naturale ale lui x din intervalul $[0,10]$ pentru care x^2+1 să fie putere a lui 2 .Dacă $x=0 \Rightarrow 0^2+1=1 \Rightarrow p=\log_2 1=0, 0\in\mathbb{Z}$. .

Pentru $x\neq 0$,număr natural par x^2+1 va fi impar,deci nu poate fi putere a lui 2.
Avem de verificat cazurile :
$x=1 \Rightarrow p=\log_2 2=1, 1\in\mathbb{Z}$
$x=3 \Rightarrow p=\log_2 10 \notin\mathbb{Z}$
$x=5 \Rightarrow p=\log_2 26 \notin\mathbb{Z}$
$x=7 \Rightarrow p=\log_2 50 \notin\mathbb{Z}$
$x=9 \Rightarrow p=\log_2 82 \notin\mathbb{Z}$
Valorile naturale ale lui x care satisfac cerințele sunt : 0;1.