Rezolvare:

1. Condiția: $n \in \mathbb{N}$;

$(n+3)! = 20 \cdot (n+2)! \Leftrightarrow n+3 = 20 \Leftrightarrow n = 17 \in \mathbb{N}$ -soluția ecuației .

2. $2^{x^2-x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x \in \{0,1\}$ **.** Mulțimea soluțiilor ecuației $\{0,1\}$.

3. Termenii sumei sunt în progresie aritmetică cu $a_1 = 6,$ rația $r = 10,$ $a_n = 96$.

Numărul termenilor se determină din formula termenului general:

$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow 96 = 6 + (n-1)10 \Leftrightarrow n-1 = 9 \Leftrightarrow n = 10$;

$$S_{10} = \frac{2a_1 + 9r}{2} \cdot 10 \Leftrightarrow S_{10} = \frac{12+90}{2} \cdot 10 \Leftrightarrow S_{10} = 510 .$$

4. Vectorii sunt coliniari dacă există k$\in \mathbb{R} - \{0\}$ astfel încât $\vec{r_1} = k \cdot \vec{r_2}$;

$$\begin{cases} \alpha + 1 = -3k \\ 2 = k \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = -7.$$

5. Relațiile lui Viète sunt: $x_1 + x_2 = \dfrac{-4-m^2}{m}; x_1 \cdot x_2 = \dfrac{m-2}{m}$;

Relația din problemă devine: $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = 2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 2 \cdot x_1 \cdot x_2$;

$\dfrac{-4-m^2}{m} = 2 \cdot \dfrac{m-2}{m} \Leftrightarrow m \in \{-2,0\}$ (1)**;** m$\in \mathbb{R} - \{0\}$ (2)**;** Din 1 și 2 rezultă $m \in \{-2\}$.

6. În $\triangle ABC$ $\left(m(\sphericalangle A) = 90^\circ\right)$: $\sin B = \dfrac{b}{a};$ $\sin C = \dfrac{c}{a};$ $\cos B = \dfrac{c}{a};$ $\cos C = \dfrac{b}{a}$;

Înlocuind în relația din problemă, în primul membru, obținem:

$$(c\sin B + b\sin C)(c\cos B + b\cos C) = \left(c \cdot \frac{b}{a} + b \cdot \frac{c}{a}\right)\left(c \cdot \frac{c}{a} + b \cdot \frac{b}{a}\right) =$$

$$= 2 \cdot \frac{b \cdot c}{a} \cdot \frac{c^2 + b^2}{a} = 2 \cdot \frac{b \cdot c}{a} \cdot \frac{a^2}{a} = 2 \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} \cdot a^2 = 2 \cdot a^2 \cdot \sin B \cdot \sin C .$$