Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) $(1-x)\cdot f(x)=(1-x)\cdot\left(1+x+x^2+x^3\right)=1+x+x^2+x^3-x-x^2-x^3-x^4=1-x^4=g(x)$

b) $F(x)=\int\left(1+x+x^2+x^3\right)dx=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ell; O(0,0)\in G_{F(x)}\Rightarrow F(0)=0\Rightarrow \ell=0\Rightarrow$

$F(x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}$

c) $\int_{-1}^{1} g(2x)\cdot|x|dx=-\int_{-1}^{0}\left(x-16x^5\right)dx+\int_{0}^{1}\left(x-16x^5\right)dx=-\left(\frac{x^2}{2}-16\frac{x^6}{6}\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(\frac{x^2}{2}-16\frac{x^6}{6}\right)\Big|_{0}^{1}=-\frac{13}{3}$

d) $\sqrt{1-g(x)}=\sqrt{1-\left(1-x^4\right)}=\sqrt{1-1+x^4}=\sqrt{x^4}=\left|x^2\right|=x^2, x^2\geq 0\Rightarrow\int_{-1}^{1}\sqrt{1-g(x)}dx=\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}=\frac{2}{3}$

e) Dacă G este o primitivă a funcției $g\Rightarrow G(x)\in\int g(x)dx\Leftrightarrow G'(x)=g(x); g(x)=1-x^4<0,\forall x\geq 1\Rightarrow G$ descrescătoare $\forall x\in[1;+\infty)$; cum $3<4; 3,4\in[1;+\infty)\Rightarrow G(3)\geq G(4)$

f) $\int_{-1}^{1}\left[f\left(x^4\right)+g\left(x^3\right)\right]dx=\int_{-1}^{1}\left(2+x^4+x^8\right)dx=\left(2x+\frac{x^5}{5}+\frac{x^9}{9}\right)\Big|_{-1}^{1}=4\frac{28}{45}\Rightarrow 4\frac{28}{45}<k$

$k\in\mathbb{Z}\Rightarrow$ cel mai mic $k=5$