

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

1.
 - a) Pentru $a = -1$ avem $\det A = -9 \neq 0$ deci sistemul omogen are soluția unică $x = y = 0$.
 - b) Prin calcul direct se obține identitatea.
Altă metodă: Se aplică Teorema lui Cayley-Hamilton cu $\text{tr}A = a + 1$ și $\det A = a - 8$.
 - c) Calcul direct se obține $a = -1$.

2.
 - a) $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z = x + y + z + 22, \forall x, y, z \in \mathbb{Z}$.
 - b) Ecuația se scrie echivalent $6x + 55 = 1 \Leftrightarrow x = -9$.
 - c) Asociativitatea a fost demonstrată la punctul a), elementul neutru al legii este $e = -11 \in \mathbb{Z}$, elementele simetrizabile au forma $x' = -x - 22 \in \mathbb{Z}$, iar legea este comutativă. În concluzie (\mathbb{Z}, \circ) este grup comutativ.