Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluții

a) Se obține $f(-1-0)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}\frac{x}{(x+2)(x+1)}=\frac{-1}{0_-}=+\infty$ și $f(-1+0)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)=$

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\frac{x}{(x+2)(x+1)}=\frac{-1}{0_+}=-\infty$

b) Din punctul a) rezultă că dreapta $x=-1$ este asimptotă verticală. Avem şi $f(-2-0)=$

$\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}}\frac{x}{(x+2)(x+1)}=\frac{-2}{0_+}=-\infty$ şi $f(-2+0)=\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}\frac{x}{(x+2)(x+1)}=\frac{-2}{0_-}=+\infty$.

Rezultă că dreapta $x=-2$ este asimptotă verticală

c) Avem că $f(x)=\frac{a}{x+2}-\frac{b}{x+1}=\frac{a(x+1)-b(x+2)}{(x+1)(x+2)}=\frac{(a-b)x+a-2b}{(x+1)(x+2)}$. Din egalitatea $\frac{x}{(x+1)(x+2)}=$ $\frac{(a-b)x+a-2b}{(x+1)(x+2)}$ se obține că $(a-b)x+a-2b=x$ pentru oricare $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,-1\}$. Rezultă că $a-b=1$ şi $a-2b=0$ cu soluția $b=1$ şi $a=2$.

d) Funcția este derivabilă şi $f'(x)=\frac{-x^2+2}{(x+1)^2(x+2)^2}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,-1\}$.

e) Din ecuația $f'(x)=0$ se obține că $-x^2+2=0$ cu soluția admisibilă $x=\sqrt{2}\in(-1,+\infty)$.

Tabelul de semn pentru derivată este:

x	-1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+ ++ + + + +++	0	− − − − − − − −
$f(x)$	↗ ↗ ↗ ↗ ↗	m	↘ ↘ ↘ ↘ ↘

f) Din egalitatea $f(a)=\frac{a}{2}$ se obține ecuația $\frac{a}{(a+2)(a+1)}=\frac{a}{2}$ sau $a^3+3a^2=0$ cu soluțiile $a\in\{0,-3\}$.

Panta tangentei în punctul $A(0,0)$ este $m=f'(0)=\frac{1}{2}$. Ecuația tangentei este $y=\frac{1}{2}x$.

Panta tangentei în punctul $B(-3,-\frac{3}{2})$ este $m=f'(-3)=\frac{-7}{4}$, iar ecuația tangentei este $y+\frac{3}{2}=\frac{-7}{4}(x+3)$.