

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) Calcul elementar.

b) Avem $x * y = \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)} > 0$ și $(x * y) - 1 = -\frac{(1-x)(1-y)}{xy + (1-x)(1-y)} < 0$ pentru că $x, y \in (0, 1)$.

c) Asociativitatea rezultă din $(x * y) * z = \frac{xyz}{xyz + (1-x)(1-y)(1-z)} = x * (y * z)$.

d) Din definiția elementului neutru ($\exists e \in G$ astfel încât $x * e = e * x = x$, $\forall x \in G$) se obține

$$\frac{xe}{xe + (1-x)(1-e)} = x, \text{ adică } x(1-x)(2e-1) = 0, \forall x \in (0, 1) \text{ și deci } e = \frac{1}{2}.$$

e) Rezultă din punctele precedente și din faptul că orice element $x \in G$ admite simetricul $x' = 1 - x \in G$.

f) Cum $x * \frac{1}{3} = \frac{\frac{x}{3}}{\frac{x}{3} + \frac{2(1-x)}{3}} = \frac{x}{2-x}$, atunci ecuația devine $\frac{x}{2-x} = \frac{1}{7}$, de unde $x = \frac{1}{4}$.