Soluție:

1. a) Se arată că $\sigma^4 = \sigma$.

b) Dacă $\sigma = e$, pentru $p = 1$ avem $\sigma^p = e$.

Dacă $\sigma \in S_n$, $\sigma \neq e$, atunci pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, $\sigma, \sigma^2, ..., \sigma^k \in S_n$.

Cum mulțimea S_n este finită, rezultă că există $i, j \in \mathbb{N}^*$, cu $i < j$, astfel ca $\sigma^i = \sigma^j$.

Obținem că pentru $p = j - i \in \mathbb{N}^*$, $\sigma^p = e$.

c) Fie $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \neq e$. Se arată că $\tau^4 = e$, deci $\tau^5 = \tau$.

2. a) Se arată că soluțiile ecuației sunt $x \in \left\{ 1, \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right\}$.

b) Utilizând relațiile lui Viète obținem $S = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$.
Dacă ecuația ar avea mai mult de o rădăcină reală, deoarece ea are coeficienți reali, ea ar avea toate rădăcinile reale. Deoarece $S = 0$, obținem $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, fals.

c) Utilizând relațiile lui Viète, obținem $\Delta = (x_1 + x_2 + x_3)\left((x_1 + x_2 + x_3)^2 - 3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)\right) = -4$.