Soluție

1.a) Deoarece $f'(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ rezultă următorul tabel de variație:

x	$-\infty$	0	∞
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\ln 2$	$\nearrow$

. Se observă că cea mai mică valoare este $\ln 2$.

b) Cum $e^{f(x)}=1+\sqrt{1+x^2}$ și $g'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ rezultă $\left(e^{f(x)}-1\right)g'(x)=1$.

c) Fie funcția $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\varphi(x)=g(x)-x$. Rezultă $\varphi'(x)=\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}-1$. Deoarece $\varphi'(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$ rezultă φ strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$. Prin urmare, pentru orice $x>0$ rezultă $\varphi(x)<\varphi(0)$. Cum $\varphi(0)=0$, se obține inegalitatea cerută.

2.a) Într-adevăr f este derivabilă și $f(0)=f(1)=0$, iar $\int_0^1 f(x)dx=\left.\dfrac{x^4}{2}-x^3+\dfrac{x}{2}\right|_0^1=0$.

b) Deoarece $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d, a\neq 0$, rezultă $\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{a}{4}+\dfrac{b}{3}+\dfrac{c}{2}+d$ și

$f(0)=d$, $f(1)=a+b+c+d$. Prin urmare, condiția $f\in M$ este echivalentă cu

$\begin{cases}a+b+c=0\\ \dfrac{a}{4}+\dfrac{b}{3}+\dfrac{c}{2}=0\end{cases}$, de unde: $a\in\mathbb{R}, a\neq 0, b=-\dfrac{3a}{2}, c=\dfrac{a}{2}, d\in\mathbb{R}$. Rezultă

$f(x)=ax^3-\dfrac{3a}{2}x^2+\dfrac{a}{2}x+d, a\in\mathbb{R}, a\neq 0, d\in\mathbb{R}$. Atunci $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=d=f(0)$.

c) Aplicăm teorema de medie. Deci $c\in(0,1)$ astfel încât $\int_0^1 f(x)dx=f(c)$. Rezultă $f(c)=f(0)$ și $f(c)=f(1)$.

Conform teoremei lui Rolle, există $\alpha\in(0,c)$ și $\beta\in(c,1)$ astfel încât $f'(\alpha)=0, f'(\beta)=0$.