Soluție.

1. a) Avem că $\left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot 81 \cdot 6^{-1} = \frac{1}{3^5} \cdot 3^4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$ şi $3^3 = 27$, prin urmare, ipoteza este adevărată şi concluzia falsă, deci propoziția dată este falsă.

b) Avem că $a = \sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}} = 625^{\frac{1}{8}}$, $b = 26^{\frac{1}{4}} = 676^{\frac{1}{8}}$ şi $c = 620^{\frac{1}{8}}$, de unde obținem $c < a < b$.

2. Prin calcul obținem $a_2 = 3 \cdot a_1 - 2 = 1,\ a_3 = 3 \cdot a_2 - 2 = 1,\ a_4 = 3 \cdot a_3 - 2 = 1$ şi apoi, prin inducție, $a_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Deci, $a_{2008} = 1$.

3. $3 \cdot C_{2x}^{x-1} = 5 \cdot C_{2x-1}^{x} \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{(2x)!}{(x-1)! \cdot (x+1)!} = 5 \cdot \frac{(2x-1)!}{x! \cdot (x-1)!} \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{2x}{x+1} = 5 \Leftrightarrow x = 5$. Soluție $x = 5$.

4. a) Avem că $f(-3) = 6,\ f(-2) = 1,\ f(-1) = 4,\ f(1) = 2,\ f(2) = 5$, deci $\operatorname{Im} f = \{1, 2, 4, 5, 6\}$.

b) Din subpunctul a) avem că $f(x) \geq 1$ pentru orice $x \in \{-3, -2, -1, 1, 2\}$ şi $g(x) < 1$ pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Prin urmare, ecuația are o singura soluție reală $x = -2$.