Soluție

1.a. Se demonstrează ușor că $A \cdot B = O_2$.

b. $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + B^2$ deoarece AB=BA=O_2

$(A-B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2 = A^2 + B^2$ deoarece AB=BA=O_2 de unde $(A+B)^2 = (A-B)^2 = A^2 + B^2$

c. $A - B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow (A-B)^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow$ inversa ei este $\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$

2.a. Se demonstrează ușor că $x * y = 3x(y+1) + 3(y+1) - 1 = (y+1)(3x+3) - 1 = 3(x+1)(y+1) - 1$.

b. $(x^2 - 2) * (y^2 - 5) = -1 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(y^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow$ $x \in \{-1;1\}$ sau y$\in$ {-2;2}.

c. Din $\begin{cases} x * (-1) = -1 \\ (-1) * y = -1 \end{cases}$ $avem: \alpha * (-1) * \beta = -1 \Rightarrow (-2008) * (-2007) * ... * (-1) * 0 * 1 * ... * 2007 * 2008 = -1$