

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $\frac{(x-1)(y-1)}{2} + 1 = \frac{xy - x - y + 1 + 2}{2} = \frac{1}{2}(xy - x - y + 3) = x \circ y, \forall x, y \in A.$

b)
$$\left. \begin{aligned} x \circ (y * z) &= x \circ (y + z - 1) = \frac{(x-1)(y+z-1-1)}{2} + 1 = \frac{(x-1)(y+z-2)}{2} + 1 \\ (x \circ y) * (x \circ z) &= \frac{(x-1)(y-1)}{2} + 1 + \frac{(x-1)(z-1)}{2} + 1 - 1 = \frac{(x-1)(y+z-2)}{2} + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

 $\Rightarrow x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z), \forall x, y, z \in A.$

c) $x \circ 1 = \frac{(x-1)(1-1)}{2} + 1 = x = \frac{(1-1)(x-1)}{2} + 1 = 1 \circ x, \forall x \in A \Rightarrow x \circ 1 \circ x = 1 \circ x = x, \forall x \in A$

d) Fie $x \in A \Rightarrow x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$. Caut $x' \in A, x' = 2k' + 1, k' \in \mathbb{Z}$ astfel ca $x * x' = x' * x = 3$.
 $2kk' + 1 = 3 \Rightarrow kk' = 1 \Rightarrow k' = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{Z}^*$. Dar $x' \in A \Rightarrow x' \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{1}{k} \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \mid 1 \Rightarrow k \in \{\pm 1\}$.
 Deci $x = 3, x = -1$.

e) $x \circ x \circ x \circ x = \frac{(x-1)^4}{8} + 1 \Rightarrow$ ecuația devine $(x-1)^4 = 0 \Rightarrow x = 1$.

f) Conform punctului c) $\Rightarrow x \circ 1 = 1 \circ x = x \circ 1 \circ x = 1, \forall x \in A$.
 Deci $(-7) \circ (-5) \circ \dots \circ (-1) \circ 1 \circ \dots \circ 7 = 1$