Rezolvare

1.Funcția f este strict descrescătoare pentru că este funcție de gradul I,cu coeficientul lui x negative,prin urmare ,dacă $x \geq 2$ atunci $f(x) \leq f(2) \Rightarrow \mathrm{Im}(f) = (-\infty, -3]$.

2.a. $n = f\left(2+\sqrt{3}\right) + f\left(2-\sqrt{3}\right) =$

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^2 - 3\left(2+\sqrt{3}\right) + 2 + \left(2-\sqrt{3}\right)^2 - 3\left(2-\sqrt{3}\right) + 2 = 6 \in \mathbb{N}.$$

2.b. Notăm cu $S = x + y = 3; P = xy = 2$ .Asociind ecuația $t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = 2$.

Soluțiile sistemului sunt $\mathbb{S} = \{(1;2),(2;1)\}$.

3.Coordonatele vârfului parabolei asociate sunt $x_v = -\frac{b}{2a}; y_v = -\frac{\Delta}{4a}$. $x_v = -\frac{m-1}{m}$ și $y_v = \frac{m-1}{m}$

Înlocuind în ecuația dreptei $-\frac{m-1}{m} + \frac{m-1}{m} = 0, \forall m \in \mathbb{R}^*$.

4.a. Folosind proprietățile puterilor avem

$$3^x + 3^x \cdot 3 + 3^x \cdot 9 + 3^x \cdot 27 = \frac{40}{3} \Leftrightarrow 3^x(1+3+9+27) = \frac{40}{3} \Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3^x = 3^{-1} \Leftrightarrow x = -1; -1 \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \mathbb{S} = \{-1\}$.

4.b. Condiția de existență: $x \geq 0$

Utilizând proprietățile logaritmilor ecuația devine :

$$1 + \frac{1}{3}\lg\left(271 + 3^{\sqrt{2x}}\right) = 2 \Leftrightarrow \lg\left(271 + 3^{\sqrt{2x}}\right) = 3 \Leftrightarrow 271 + 3^{\sqrt{2x}} = 1000 \Leftrightarrow 3^{\sqrt{2x}} = 729 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{2x} = 6 \Leftrightarrow x = 18; 18 \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow \mathbb{S} = \{18\}.$$