Soluție

a) F primitivă a funcției $f \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx \Leftrightarrow F'(x)=f(x)$;

$x\in(0,+\infty)\Rightarrow x+1>0, e^x>0 \Rightarrow F'(x)=f(x)=e^x(x+1)>0\Rightarrow$ oricare primitivă F a funcției f este crescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

b) $\int \frac{f(x)}{e^x}dx=\int \frac{(x+1)e^x}{e^x}dx=\int (x+1)dx=\frac{x^2}{2}+x+\ell, \ell\in\mathbb{R}$

c) $\int_1^2 \frac{f(x)}{xe^x}dx=\int_1^2 \frac{(x+1)e^x}{xe^x}dx=\int_1^2 \frac{x+1}{x}dx=\int_1^2\left(1+\frac{1}{x}\right)dx=\left(x+\ln|x|\right)\Big|_1^2=1+\ln 2$

d) Notăm funcțiile $u:(1,+\infty)\to\mathbb{R}, u(x)=\frac{1}{x}; v:(1,+\infty)\to\mathbb{R}, v(x)=x+1\Rightarrow$

$u'(x)=-\frac{1}{x^2}; v'(x)=1; x\in(1,+\infty)\Rightarrow -\frac{1}{x^2}<1\Rightarrow u'(x)<v'(x); u(1)=1<2=v(1)\Rightarrow u(x)\le v(x)\Rightarrow \frac{1}{x}\le x+1$

e) Integrând prin părți obținem:

$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 (x+1)e^x dx=\int_1^2 (x+1)\left(e^x\right)' dx=\left[(x+1)e^x\right]\Big|_1^2-\int_1^2 (x+1)' e^x dx\Rightarrow$

$\int_1^2 f(x)dx=2e^2-e$

f) Teorema de monotonie: $f(x)\ge g(x), \forall x\in[u;v]\Rightarrow \int_u^v f(x)dx\ge\int_u^v g(x)dx$;

din punctul **d)** avem $\frac{1}{x}\le x+1\Leftrightarrow \frac{e^x}{x}\le e^x(x+1), e^x>0\Rightarrow \int_1^2\frac{e^x}{x}dx\le\int_1^2 e^x(x+1)dx=\int_1^2 f(x)dx=2e^2-e$ (din punctul **e)**); cum $2e^2-e\le 2e^2\Rightarrow \int_1^2\frac{e^x}{x}dx\le 2e^2$