

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare.

a) $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}), \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0$ număr par $\Rightarrow A \in M$.

b) $2A - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & 2 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -7 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$

c) $\det X = \begin{vmatrix} a-1 & 0 & 1 \\ a & 1 & -2 \\ 2a+1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = a-1+3a-2a-1+6a-6 = 8a-8 = 8(a-1)$ număr par, $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow A \in M$.

d)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & 9 & -1 \\ 9 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & 9 & -1 \\ 9 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 0 \\ 0 & -21 & 7 \\ 21 & 0 & 14 \end{pmatrix} = 7A.$$

e) $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2y = -4 \\ -4y + z = 11 \\ 3x + z = 6 \end{cases} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{Z}).$

f) $\det B = \begin{vmatrix} 2007 & 1 & 4 \\ 2008 & 2 & 5 \\ 2009 & 3 & 6 \end{vmatrix} \stackrel{C_1+C_2}{=} \begin{vmatrix} 2008 & 1 & 4 \\ 2010 & 2 & 5 \\ 2012 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1004 & 1 & 4 \\ 1005 & 2 & 5 \\ 1006 & 3 & 6 \end{vmatrix},$ număr par $\Rightarrow B \in M$.