Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SOLUȚIE:

a) $A(1,1)$ este punctul de tangență iar panta tangentei la grafic este 2.

$f'(x)=3x^2-1 \Rightarrow f'(1)=2$ Ecuația tangentei are forma $y-f(x_0)=2(x-x_0)$

$\Leftrightarrow y=2x+f(1)-2 \Leftrightarrow y=2x-1$

b) $f'(x)=\left(x^3-x+1\right)'=3x^2-1$; $f'(x)=2 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$

c) Punctele de extrem local ale funcției f sunt $x_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ și $x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Valoarea cerută este $\left|x_2-x_1\right|=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

d) $x_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ și $x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$ sunt puncte de maxim, respectiv minim pentru funcția f;

$f\left((-\infty,0]\right)=\left(-\infty, f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]=\left(-\infty,1+\frac{2}{3\sqrt{3}}\right]$, $f\left([0,\infty)\right)=\left[f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\infty\right)=\left[1-\frac{2}{3\sqrt{3}},\infty\right)$

$M=f\left((-\infty,0]\right)\cap f\left([0,\infty)\right)=\left[1-\frac{2}{3\sqrt{3}},1+\frac{2}{3\sqrt{3}}\right]$

e) $h(x)=\left(e^x-x\right)\cdot g(x), \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow h'(x)=\left(e^x-1\right)\cdot g(x)+\left(e^x-x\right)\cdot g'(x)$

$h(1)=2e-2 \Rightarrow (e-1)\cdot g(1)=2(e-1) \Rightarrow g(1)=2$, $g'(1)=0 \Rightarrow h'(1)=(e-1)g(1)=2(e-1)$.

f) $h(1)=2(e-1)$ și $h'(1)=2(e-1)$. Ecuația tangentei la graficul funcției h în punctul de coordonate $\left(1,2(e-1)\right)$ este $y=2(e-1)x$.