Soluție

a) $g'(x)=\left(e^x-x+1\right)'=e^x-1\Rightarrow g'(x)=f(x)\Leftrightarrow g(x)\in\int f(x)dx$

b) $F(x)=\int f(x)dx=\int\left(e^x-1\right)dx=e^x-x+\ell; O(0,0)\in G_F\Rightarrow F(0)=0\Rightarrow \ell=-1\Rightarrow F(x)=e^x-x-1$

c) $\int_0^{\frac{1}{2}} f'(x)dx=f(x)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\left(e^x-1\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}-1$

d) $F(x)=\int f(x)dx=\int\left(e^x-1\right)dx=e^x-x+\ell; F(0)=2008\Rightarrow \ell=2007\Rightarrow F(x)=e^x-x+2007$

e) folosim teorema de monotonie pentru funcția g :

„$m\cdot(b-a)\le\int_a^b g(x)dx\le M\cdot(b-a),\forall a,b\in\mathbb{R},a\le b$**,** unde m şi M sunt valorile de minim respective maxim ale funcției g în intervalul $[a,b]$**”**

$\Rightarrow g'(x)=\left(e^x-x+1\right)'=e^x-1; g'(x)=0\Rightarrow x'=0\Rightarrow g'(x)<0,x\in(-\infty,0]\Rightarrow g\downarrow;$

$g'(x)>0,x\in(0,\infty)\Rightarrow g\uparrow\Rightarrow\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow g(x)>m=g(0)=2\Rightarrow$

(prin înlocuire în teorema de medie) $\int_{-1}^{1} g(x)dx\ge 2\cdot(1-(-1))=2\cdot 2=4$

f) $\int_1^n [f(\ln x)]dx=\int_1^n (x-1)dx=\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_1^n=\frac{n^2-2n+1}{2}\Rightarrow$

$\frac{n^2-2n+1}{2}=8\Rightarrow(n-1)^2=16\Rightarrow n_1=-3,n_2=5;n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow n=5$