Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SOLUȚIE:

a) $f'(x)=1-\left(-\frac{1}{x^2}\right)-2\cdot\frac{1}{x}=\frac{x^2-2x+1}{x^2}\Rightarrow\frac{f'(x)}{g(x)}=\frac{\frac{x^2-2x+1}{x^2}}{x^2+2x+1}=\frac{x^2-2x+1}{x^2\left(x^2+2x+1\right)},\forall x>0$

$\frac{x^2-2x+1}{x^2\left(x^2+2x+1\right)}=\left(\frac{(x-1)}{x(x+1)}\right)^2,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ este pătratul numărului real $\frac{(x-1)}{x(x+1)},\forall x\in\mathbb{R}$

b) $f(1)=2\Rightarrow\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{f(x)-2}{x-1}=f'(1)\Rightarrow\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{f(x)-2}{x-1}=0$, care este un număr natural .

c) $x=e,\ f(e)=e+2-\frac{1}{e}-2\ln e=e-\frac{1}{e}\Rightarrow$ punctul de tangență are coordonatele $\left(e,e-\frac{1}{e}\right)$

$f'(e)=\frac{(e-1)^2}{e^2}\ \Rightarrow t:y-\left(e-\frac{1}{e}\right)=\left(\frac{e-1}{e}\right)^2(x-e)\Rightarrow t:y=\left(1-\frac{1}{e}\right)^2\cdot x+2\left(1-\frac{1}{e}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=1\Rightarrow y=1$ este asimptotă orizontală la graficul funcției h, spre $+\infty$ şi spre $-\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}h(x)=+\infty,\ \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}h(x)=-\infty\Rightarrow x=-1$ este asimptotă verticală la graficul funcției h

e) $h'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}>0,\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\ \Rightarrow h$ este strict crescătoare pe intervalele delimitate de asimptota verticală $x=-1$, adică pe intervalele $(-\infty,-1)$ respectiv, $(-1,\infty)$

f) Din subpunctul **e)** $\Rightarrow h$ este strict crescătoare pe $(-1,\infty)$.

$x^2>-1$ şi $x^2<x^2+1,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow h\left(x^2\right)<h\left(x^2+1\right)\Rightarrow\ \frac{x^2}{x^2+1}<\frac{x^2+1}{x^2+2},\forall x\in\mathbb{R}$