

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

- a). Se aplică legea de compoziție și se va obține : $-(n * (-n)) = -(-n^2 + n + (-n)) = n^2$ care este un pătrat perfect $\forall n \in \mathbb{N}$.
- b). Pentru $x, y, z \in \mathbb{R}$ se demonstrează că $(x * y) * z = x * (y * z) = xyz + xz + yz + xy + x + y + z$.
- c). $e \in \mathbb{R}$ este elementul neutru $\Leftrightarrow x * e = e * x = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Se calculează e din $x * e = x$ și se găsește de forma $e = 0$, pentru $x \neq -1$.

d).
$$\begin{cases} x * y = 1 + xy \\ x * x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy + x + y = 1 + xy \\ x^2 + 2x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + 2x - y = 0 \end{cases}; \text{ Se aplică metoda substituției } x = 1 - y.$$

Se rezolvă ecuația care rezultă din substituție $y^2 - 5y + 3 = 0$.

$$\Delta = 13 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2} \\ y_2 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \end{cases}; \text{ Soluția sistemului } S = \left\{ \left(\frac{-3 - \sqrt{13}}{2}, \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \right); \left(\frac{-3 + \sqrt{13}}{2}, \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \right) \right\}.$$

e). $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \exists x' \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ astfel încât $x * x' = x' * x = e$ de unde se obține $x' = \frac{-x}{x+1}$.

f). $\sqrt{x * x} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2x} = 1 \quad C.E. \quad x^2 + 2x \geq 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [0, \infty)$.

$$\sqrt{x^2 + 2x} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \quad \Delta = 8 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 + \sqrt{2} \in (-\infty, -2] \cup [0, \infty) \\ x_2 = -1 - \sqrt{2} \in (-\infty, -2] \cup [0, \infty) \end{cases}.$$

$$x_1 * x_2 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x_1 x_2 + x_1 + x_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow (-1 + \sqrt{2})(-1 - \sqrt{2}) + (-1 + \sqrt{2}) + (-1 - \sqrt{2}) = -3 \in \mathbb{Z}$$