

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 013

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$.

5p a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

5p b) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f .

5p c) Să se demonstreze că $f(x) \geq 1$, pentru orice $x > -1$.

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ se consideră integralele $I_n = \int_e^{e^2} \frac{\ln^n x}{x} dx$.

5p a) Să se verifice că $I_0 = 1$.

5p b) Să se determine I_1 .

5p c) Folosind eventual faptul că $1 \leq \ln x \leq 2, \forall x \in [e, e^2]$, să se demonstreze că $1 \leq \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} \leq 2^n, \forall n \in \mathbb{N}$.