

A skatulya-elv (Dirichlet-elv)

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Ezt az elvet különböző országokban különbözőképpen nevezik. Például Franciaországban úgy ismerik, mint a "fiókok elvét", Angliában mint a "galambdúcok elvét" míg Bulgáriában és Oroszországban mint Dirichlet-elvet.

Az elv a nagy német matematikussal, Gustav Lejeune-Dirichlet-vel (1805 - 1859) áll kapcsolatban, bár már előtte is jól ismerték az elvet. Dirichlet érdeme nem az előbbi egyszerű tény felfedezése volt, hanem az alkalmazása számos érdekes probléma megoldásában a számelmélet terén.

Ha van 9 doboz és 10 tárgy, akkor biztosan van LEGALÁBB
1 doboz, amelyikben 2 tárgy van!



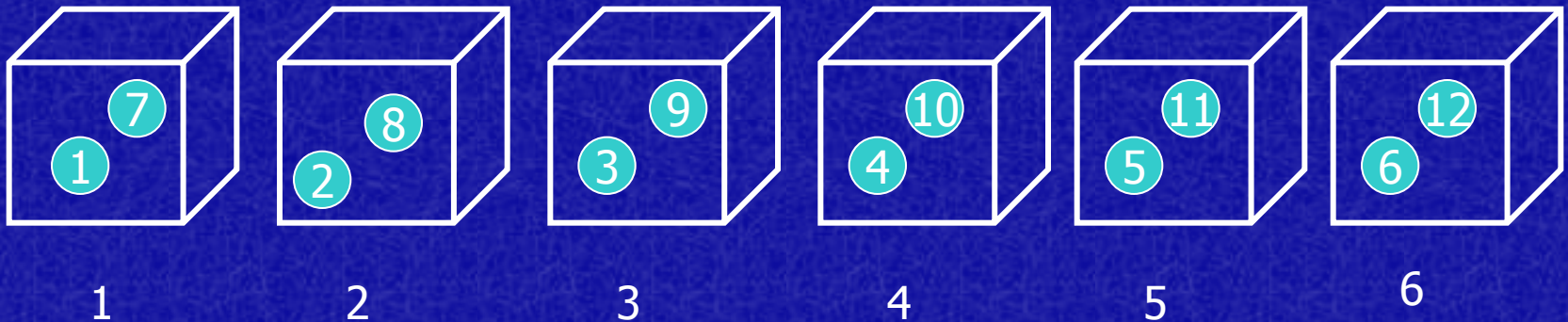
A „legrosszabb” eset, ha mind a 9-ben van 1-1 tárgy, akkor a 10. biztos
már egyik mellé kerül, ott 2 lesz.

A skatulya elv (1. változat)

Ha van n doboz és $n+1$ tárgy,
akkor biztosan lesz legalább 1 doboz,
amelyikben legalább 2 tárgy lesz.

Ha van 6 doboz és 13 tárgy, akkor biztosan van LEGALÁBB 1 doboz, amelyikben 3 tárgy van!

13



„Legrosszabb esetben” minden dobozba jut $13:6=2$ marad 1 tárgy

Először minden dobozba tegyünk 1-1 golyót, aztán a 2. golyókat egyesével

A skatulya elv (2. változat)

Ha van n doboz és $n \times k + r$ ($r > 0$) tárgy,
akkor biztosan lesz legalább 1 doboz,
amelyikben legalább $k+1$ tárgy lesz.

Másképpen: Ha m tárgyat osztunk szét n csoportba, és $m > nk$, ahol k egy természetes szám, akkor legalább $k + 1$ tárgy fog kerülni az egyik csoportba.

1. példa: Egy iskolába 367 diák jár. Bizonyítsuk be, hogy van legalább 2 diák, akik ugyanazon a napon ünneplik a születésnapjukat.

Skatulyák: az év 366 napja

Tárgyak: a $367=366+1$ diák

Tehát létezik legalább 2 diák aki ugyanabban a hónapban született
(1. változat)

2. példa: Egy iskolába 735 diák jár. Bizonyítsuk be, hogy van legalább 3 diák, akik ugyanazon a napon ünneplik a születésnapjukat.

Skatulyák: az év 366 napja

Tárgyak: a $735 = 366 \times 2 + 3$ diák

Tehát létezik legalább $2+1=3$ diák aki ugyanabban a hónapban született
(2. változat)

3. példa: Legkevesebb hány tanulója kell legyen egy iskolának, hogy biztosan létezzen 5 tanuló, aki ugyanazon a napon született?

Skatulyák: az év 366 napja

Tárgyak: ??? tanuló

Mivel $366 \times 4 = 1464$, ezért legkevesebb $1464 + 1 = 1465$ tanuló kell legyen

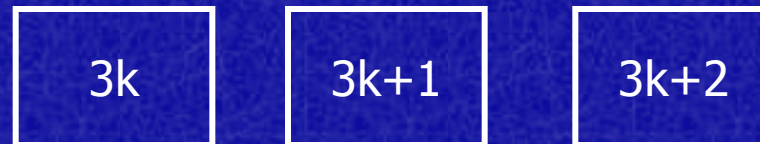
Bizonyítsuk be, hogy bármely 3 egész szám között van 2, amelynek az összege páros.

Páros

Páratlan

Mivel 2 skatulya van és 3 szám, ezért valamelyik skatulyában 2 szám kerül, és ezeknek az összege páros lesz.

Bizonyítsuk be, hogy bármely 5 egész szám között van 3, amelynek az összege osztható 3-mal.



Most 3 skatulyánk van és 5 számunk.

Ha mindegyik skatulyában van 1-1 szám, akkor ennek a 3-nak az összege osztható 3-mal.

Ha nincs mind a 3 skatulyából, akkor az 5 szám közül legalább 3 ugyanabba a skatulyában van, tehát ennek a háromnak az összege osztható 3-mal.

Adott 5 természetes szám. Bizonyítsuk be, hogy a számok közti különbségek közül legalább egy osztható 4-gyel!

A lehetséges maradékok 4-gyel való osztás esetén 0, 1, 2 és 3.

Tekintsünk 4 fiókot, hozzárendelve egy-egy osztási maradékhoz.

A skatulya-elvből következik, hogy legalább 2 szám ugyanabba a fiókba fog kerülni.

Mivel ezek 4-gyel való osztási maradéka megegyezik, a különbségük osztható lesz 4-gyel és így kész is a megoldás.

Adott 4 természetes szám. Bizonyítsuk be, hogy közülük legalább kettő azonos maradékot ad 3-mal osztva!

A lehetséges maradékok 3-mal történő osztás esetén 0, 1 és 2. Tekintsünk 3 fiókot, amik hozzá vannak rendelve a különböző maradékokhoz. Tegyük a 4 természetes számot a fiókokba a maradékaik szerint. Így a megoldás következik a skatulya-elv alapján.

Általában: Ha n egy természetes szám, akkor tetszőleges $n + 1$ természetes szám közül kiválasztható kettő úgy, hogy a különbségük osztható legyen n -nel.

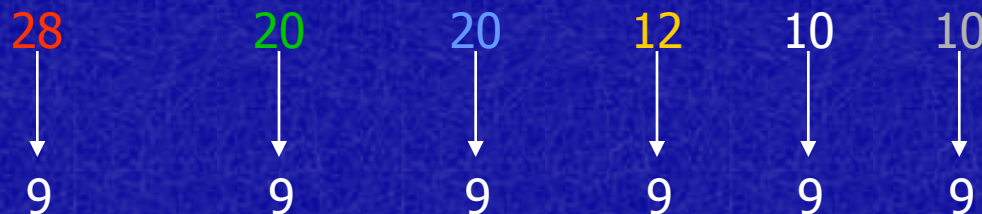
Egy osztályban 25 diák tanul. Bizonyítsuk be, hogy közülük legalább 3 ugyanabban a hónapban született!

Tekintsünk 12 fiókot, azaz annyit, amennyi hónap van egy évben.

Tegyük a diákokat a születési hónapok szerint a fiókokba! Aztán, mivel $25 > 12 \cdot 2$, a skatulya-elvből következik, hogy az egyik fiókban legalább $2 + 1 = 3$ diák van (ebben az esetben $n = 12$ és $k = 2$).

Egy dobozban 10 golyó van, 28 piros, 20 zöld, 20 kék, 12 sárga, 10 fehér, 10 fekete. Legkevesebb hány golyót kell kivenni ahhoz, hogy biztosan legyen közöttük 10 egyszínű?

Nézzük a legkedvezőtlenebb esetet vagyis azt, amikor mindegyikből éppen 9 lesz, az még nem felel meg:

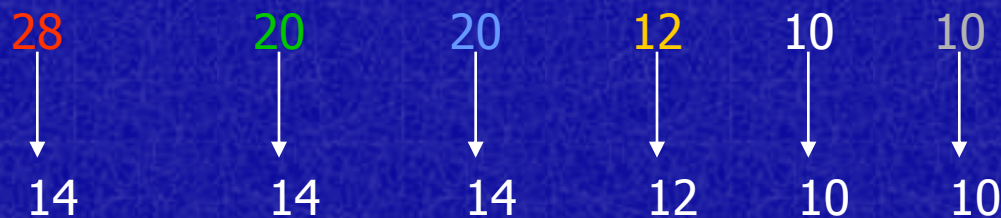


Tehát a skatulya elv alapján: $6 \times 9 + 1 = 55$ golyót kell kivennünk!

A skatulyák ezúttal a SZÍNEK, és a tárgyak a GOLYÓK!

Egy dobozban 10 golyó van, **28 piros**, **20 zöld**, **20 kék**, **12 sárga**, 10 fehér, 10 fekete. Legkevesebb hány golyót kell kivenni ahhoz, hogy biztosan legyen közöttük 15 egyszínű?

Nézzük a legkedvezőtlenebb esetet vagyis azt, amikor mindegyikből éppen 14 lesz, de ez a sárga, fehér, fekete színek esetén nem lehet, ott csak a maximumot vehetjük.



Tehát a skatulya elv alapján: $3 \times 14 + 12 + 2 \times 10 + 1 = 75$ golyót kell kivennünk!

A skatulyák ezúttal a SZÍNEK, és a tárgyak a GOLYÓK!

Mutassuk meg, hogy 5 darab 10-nél nagyobb prímszám közül mindig kiválasztható 2, amelyek különbsége osztható 10-zel.

A prímszámok végződése: 1, 3, 7, vagy 9

Mivel csak 4-féle végződés és 5 prímszám van, ezért létezik 2 amelyik ugyanarra a számjegyre végződik, tehát a különbségük osztható 10-zel

Mutassuk meg, hogy 7 darab négyzetszám közül mindig kiválasztható 2, amelyek különbsége osztható 10-zel.

A négyzetszámok végződései: 0, 1, 4, 5, 6 vagy 9

Mivel csak 6-féle végződés és 7 négyzetszámunk van, ezért létezik 2 amelyik ugyanarra a számjegyre végződik, tehát a különbségük osztható 10-zel

Két villanyoszlop távolsága 50 m. A közöttük kifeszített vezetékre 26 fecske száll. Mutassuk ki, hogy mindig van legalább két fecske, melyeknek egymástól való távolsága nem nagyobb 2 m-nél.

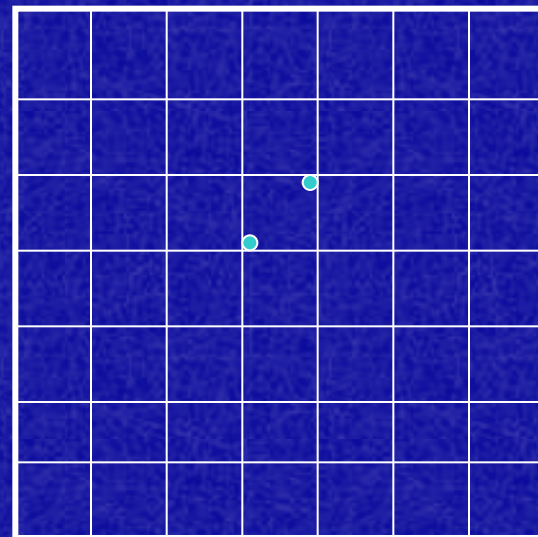
Osszuk fel az oszlopok közötti huzalt 2 m-es szakaszokra, ezek lesznek a skatulyák (25 skatulya van).

Mivel 26 fecske száll a vezetékre, lesz olyan skatulya (2 m-es vezetékdarab), amelyre két fecske jut, és így a közöttük levő távolság nem nagyobb 2 m-nél.

50 pont van bejelölve egy 7 cm oldalhosszúságú négyzeten. Bizonyítsuk be, hogy a pontok közül legalább 2 lefedhető egy 1 cm oldalhosszúságú négyzettel!

Osszuk fel az eredeti négyzetet 49 darab 1 cm oldalhosszúságú négyzetre!

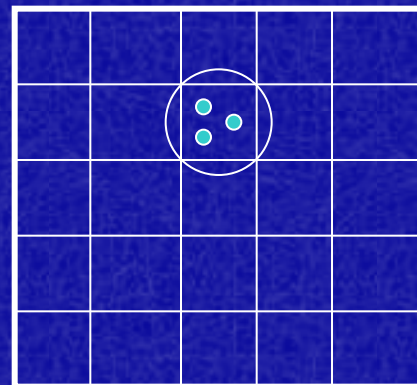
A skatulya-elv alapján legalább 2 pont, az egyik 1 cm oldalhosszúságú négyzetbe fog esni.



Így egy 1 oldalú négyzet lefedi a két pontot.

Az egység oldalú négyzetben adott 51 pont. Igazoljuk, hogy van közöttük 3 olyan, amelyek egy $1/7$ sugarú körben vannak.

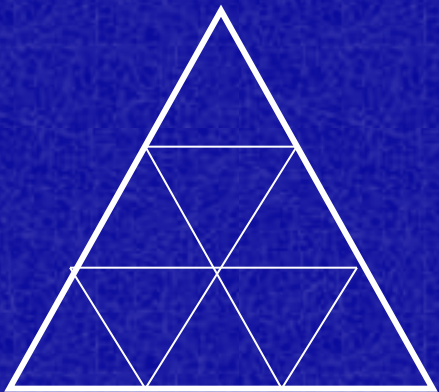
Osszuk fel a négyzetet $5 \times 5 = 25$ egybevágó kis négyzetre. Mivel $51 = 25 \times 2 + 1$ ezért a skatulya elv alapján létezik 3 olyan pont amelyik ugyanabba a kiségyzetbe esik, amelynek az oldala $1/5$ és az átlója $\frac{1}{5}\sqrt{2}$



Ha $\frac{1}{5}\sqrt{2} < 2/7$, akkor a négyzet lefedhető egy $1/7$ sugarú körrel.

De $\frac{1}{5}\sqrt{2} < 2/7$ ekvivalens azzal, hogy $49 \times 2 < 100$

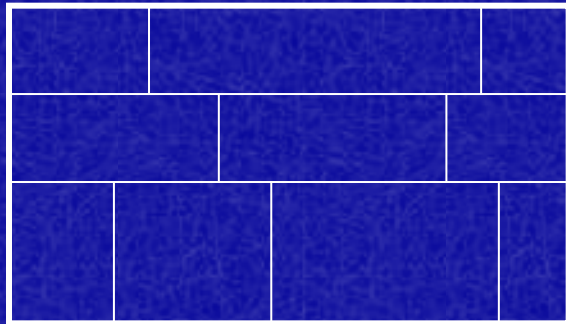
Egy szabályos háromszög alakú céltábla oldala 1m. A céltáblát 10 lövés érte. Igazoljuk, hogy van 2 olyan találat, amelyek 34 cm-nél közelebb vannak egymáshoz.



Osszuk fel a háromszög oldalait 3-3 egyenlő részre, és párhuzamosokkal kössük össze ezeket a pontokat. Így az eredeti szabályos háromszöget 9 kongruens szabályos háromszögre osztottuk amelyeknek az oldalhossza $33 \frac{1}{3}$ cm.

Mivel 10 találat van és csak 9 „skatulya” ezért létezik olyan kisháromszög, amelybe 2 találat került, és ezek legtávolabb egymástól $33 \frac{1}{3}$ cm-re kerülhetnek, tehát a távolságuk kisebb mint 34 cm.

Egy téglalap méretei 6 és 9 egység. Ha a téglalapot felbontjuk 10 darab egész oldalhosszúságú téglalapra, akkor igazoljuk, hogy ezek között van 2 egyenlő területű!



Feltételezzük az ellenkezőjét vagyis, hogy a 10 darab téglalap mind különböző területű (egész szám). Ekkor ezek az összterülete nagyobb mint :

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$$

De a nagytéglalap területe $6 \times 9 = 54 < 55$, ezért ellentmondáshoz jutottunk.

A skatulya elvnek ez a változata az úgynevezett **INDIREKT** bizonyítás.

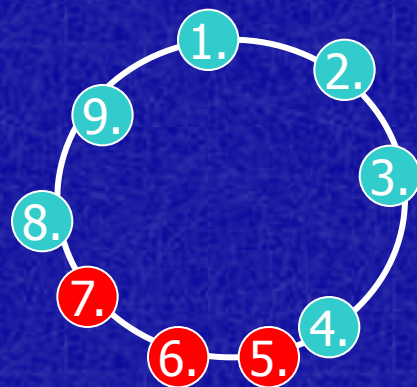
Helyezzük el az 1-től 9-ig a számjegyeket tetszőleges sorrendben egy kör mentén. Bizonyítsuk be, hogy bármely sorrend esetén lesz a kör mentén három egymást követő szám, amelyek összege nagyobb, vagy egyenlő 15-tel.

Feltételezzük az ellenkezőjét vagyis, hogy bármely egymást követő 3 szám összege < 14 -nél.

Tehát mind a 3 egymásutáni 3-as csoport < 14 ,
ezért az összegük KISEBB mint $3 \times 14 = 42$

De most írjuk fel a 3 darab EGYMÁS UTÁNI 3-as csoport összegét, ez éppen:
 $1+2+3+4+5+6+7+8+9= 45$

Mivel $42 < 45$, ezért ellentmondáshoz jutottunk, hiszen ugyanarról az összegről van szó.



Hat osztálytárs részt vesz a "találjuk el a célt" versenyben. Mutassuk meg, hogy közülük legalább kettőnek azonos számú találata van, ha a találatok száma összesen 14.

Az összes olyan diákot, akinek 0 találata van, egy 0-ás címkéjű fiókba tesszük, az összes olyan diákot, akinek 1 találata van, egy 1-es címkéjű fiókba tesszük és így tovább, minden diákot, akinek 14 találata van, egy 14-es címkéjű fiókba teszünk.

Ha minden diák különböző fiókba esik, akkor az összes találatok száma nem kevesebb, mint $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.

Ez ellentmond annak a feltételnek, hogy a találatok száma 14.

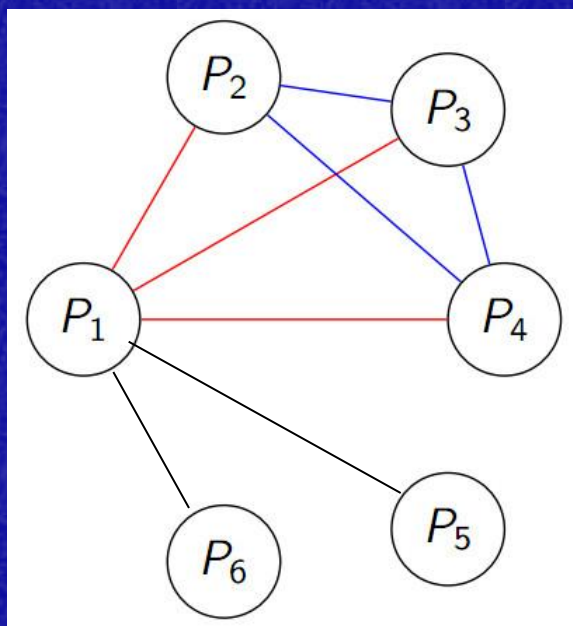
Következésképpen legalább két osztálytársnak azonos számú találata kell legyen.

Ez is a skatulya elvnek az indirekt formája volt!

A skatulya elv indirekt formája

Amikor nem sikerül bizonyítani direkt módon, hogy valamelyik skatulyában legalább 1-gyel több tárgy lesz mint a többibe, akkor tagadjuk a konklúziót, és akkor a feltevéssel ellentmondásra jutunk, ami abból adódik, hogy nem fogadtuk el a konklúziót (hogy egyik skatulyába legalább 2 tárgy van),
tehát az állítás igaz kell legyen, miszerint egyik skatulyába legalább 1-gyel több tárgy van.

Igazoljuk, hogy egy 6 tagú társaságban létezik 3 személy amelyek barátok, vagy 3 akik idegenek! (A barátsági viszony kölcsönös, akár csak az idegen viszony).

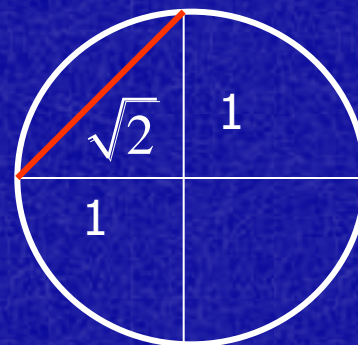


Jelöljük a 6 személyt a 6 karikával, **piros éllel a barát**, **kék éllel az idegen** viszonyt. Azt kell igazolnunk, hogy létezik egyszínű háromszög. Tekintsük a P_1 ismeretségét a többi 5 személlyel. A skatulyaelv alapján 3 személy **vagy barát vagy idegen** mindhárom. Az általánosság csorbítása nélkül feltehető, P_2, P_3, P_4 a P_1 -hez **piros vonallal** kapcsolódik.

Figyeljük most a nyílakat a P_2, P_3 és P_4 között. Ha valamelyik **piros** lenne, akkor kész. De ha egyik sem lehet piros, akkor mindhárom **kék**, így is kész ☺

Az egység sugarú kör kerületén elhelyeztünk 5 pontot. Igazoljuk, hogy van közöttük 2, amelyek távolsága nem nagyobb $\sqrt{2}$ -nél.

Osszuk a kör kerületét 4 egyenlő részre. Így 4 körívünk lesz, és 5 pont, ezért a skatulya elv alapján létezik 2 pont amelyik ugyanarra a negyed körívre jut, De ekkor a távolságuk nem nagyobb mint $\sqrt{2}$

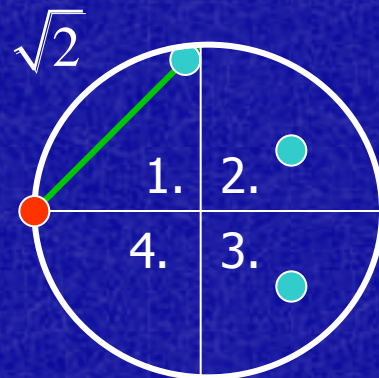


Az egység sugarú kör kerületén elhelyeztünk 4 pontot. Igazoljuk, hogy van közöttük 2, amelyek távolsága nem nagyobb $\sqrt{2}$ -nél.

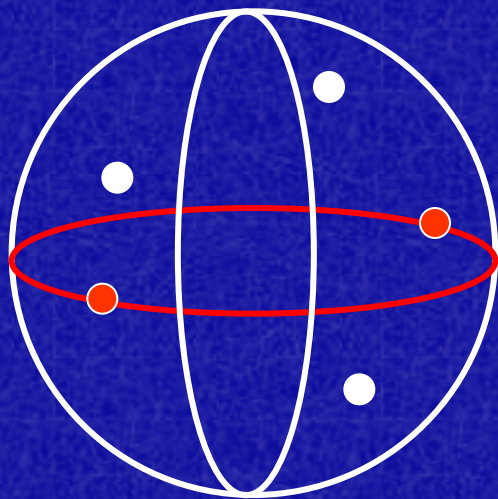
Rögzítsük a kör kerületén az egyik pontot, és így osszuk a kör kerületét 4 egyenlő részre. Így 4 körívünk lesz, és még 3 pont.

Amennyiben valamelyik pont az 1. vagy 4. körívre jutnának, a feladat megoldott.

De ha egy sem jut ezekbe, akkor van 3 pontunk és 2 másik körív. Ezért a skatulya elv alapján valamelyikre 2 pont kerül, és ekkor megint megoldottuk a feladatot.



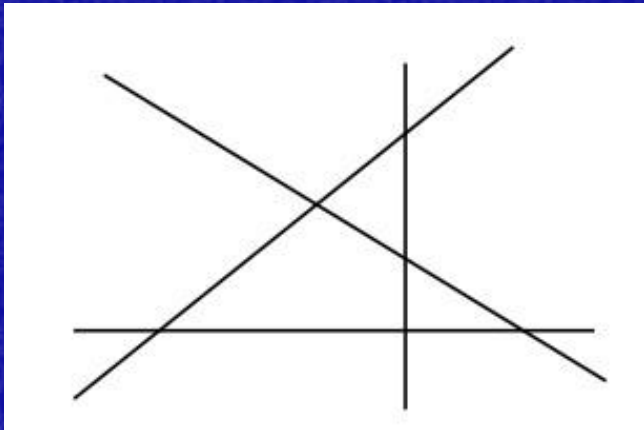
Tekintsünk a gömb felületén 5 pontot. Igazoljuk, hogy létezik olyan félgömb - a határoló felületeket is beleértve - amelyik tartalmaz az 5 pont közül 4 pontot!



Rajzoljunk meg egy olyan „nagykört” amelyik átmegy az 5 pont közül **2 ponton**. Ez a nagykör egy FELSŐ és egy ALSÓ félgömböt határoz meg. A skatulyaelv alapján, a többi 3 pont közül biztosan 2 vagy a felső, vagy az alsó félgömbön van. Legyen pl. a felsőn.

Ekkor a felső félgömbön (a határfelületeket is beleértve), éppen **4 pont** lesz.

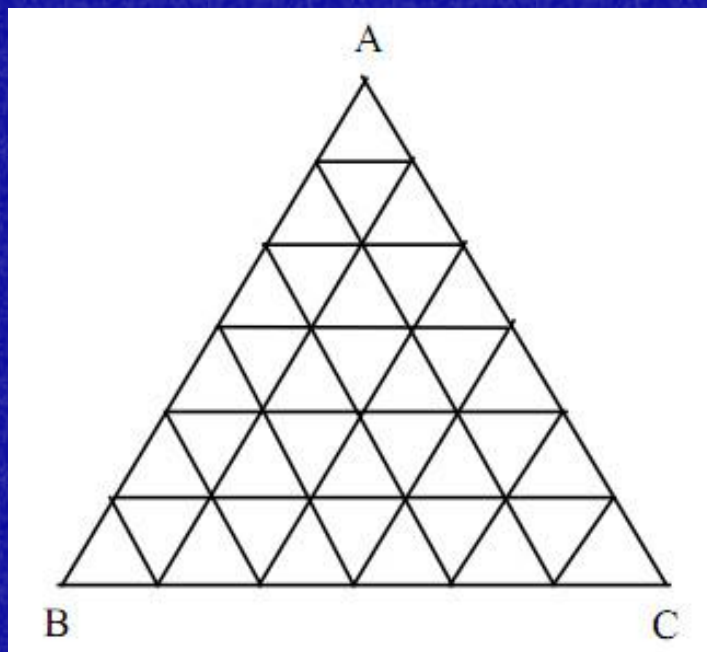
Rajzoljunk meg a síkban 4 különböző egyenest, ezek a síkot diszjunkt tartományokra osztják. Igazoljuk, hogy bárhogyan veszünk fel 12 pontot az egyeneseken kívül, mindig lesz 2 olyan pont, amely ugyanabban a síktartományban vannak.



A legtöbb síktartományt akkor kapjuk, ha az egyenesek teljesen általános viszonyúak. Egy ilyen helyzet a mellékelt ábrán látható.

Ezek a síkot a legtöbb, 11 diszjunkt tartományra osztják. Mivel 12 pontunk van, ezért valamelyik tartományban van 2 pont.

Tekintsünk az egységnyi oldalú szabályos háromszögben 37 pontot. Igazoljuk, hogy van közöttük 2 amelynek a távolsága kisebb mint $1/6$.



Osszuk fel a háromszög minden oldalát 6-6 egyenlő részre. Így a háromszöget összesen 36 darab $1/6$ oldalú szabályos háromszögre osztottuk. A skatulya elv szerint, mivel 37 pontunk van, ezért egyik kis háromszögbe biztosan van legalább 2 pont, amelyek legtávolabb egymástól, egy oldal mentén lesznek, ami $1/6$.

Határozzuk meg a királyok számának lehetséges legnagyobb számát egy közös saktáblán úgy, hogy egyik sem üt egyetlen másik királyt sem.

X		X		X		X	
X		X		X		X	
X		X		X		X	
X		X		X		X	

Minden király legalább 4 mezőt ural. A király által uralt mezők száma akkor pontosan 4, ha a király a saktábla négy csúcsának valamelyikén helyezkedik el (ellenkező esetben a király több mint 4 mezőt ural). Bontsuk fel a táblát 16 darab 2×2 -es négyzetre. Következik, hogy nem lehetséges, 16-nál több királyt elhelyezni a feladat feltételei szerint mivel 2 király nem lehet egy és ugyanazon a 2×2 -es négyzeten. Egy példa a 16 király elhelyezésére:

Adottak az 1, 2, 3, ..., 8, 9 számok. Kiválasztunk közülük 5-öt. Igazoljuk, hogy ezek között mindig van 2, amelyek relatív prímekek!

Ha az 1 is a kiválasztott, akkor az mindegyikkel relatív prím, tehát a feladatot megoldottuk.

Feltételezzük, hogy az 1-et nem választottuk ki. Ekkor képezzük a következő 4 skatulyát:

2, 3

4, 5

6, 7

8, 9

Ekkor a skatulyaelv alapján, a kiválasztott 5 szám közül biztosan lesz 2 amelyik ugyanabba a skatulyába kerül, vagyis éppen relatív prímekek.

Adottak az 1, 4, 7, ..., 97, 100 számok. Kiválasztunk közülük 19-et. Igazoljuk, hogy ezek között mindig van 2, amelyek összege 104!

Az előbbi sorozatnak $(100-1):3= 33$ tagja van.

Ekkor képezzük a következő 17 skatulyát:

4, 100	7, 97	10, 94	...	51, 53	52
--------	-------	--------	-----	--------	----

Ekkor a skatulyaelv alapján, a kiválasztott 19 szám közül biztosan lesz 2 amelyik ugyanabba a skatulyába kerül, vagyis az összegük éppen 104.

Mutasd meg, hogy 7 egész szám között mindig van 2, amelyeknek az összege vagy a különbsége osztható 11-gyel.

A 11-gyel való osztási maradékokat csoportosítsuk így:

1, 10	2, 9	3, 8	4, 7	5, 6	0
-------	------	------	------	------	---

Ezért a 7 szám közül 6 csoport valamelyikébe 2 kerül.

Ha ennek a két számnak ugyanaz a végződése akkor különbségük osztható 11-gyel, ha nem, akkor az összegük osztható 11-gyel.

Az 1, 2, 3, ..., 20 számok közül kiválasztunk 11-et. Mutassuk ki, hogy a kiválasztott számok között mindig van 2, amely közül egyik a másiknak az osztója!

Az 1, 2, 3, ..., 20 számokat besoroljuk 10 csoportba amelyekre igaz, hogy ha valamelyik csoportból veszünk 2 számot, akkor az egyik a másiknak az osztója:

$\{1, 2, 4, 8, 16\}, \{3, 6, 12\}, \{5, 10, 20\}, \{7, 14\}, \{9, 18\},$
 $\{11\}, \{13\}, \{15\}, \{17\}, \{19\}$

Mivel 11 számunk és 10 osztályunk van, ezért létezik 2 a kért tulajdonsággal.

Adott egy 3×3 -as, 9 egység-négyzetből álló négyzet.
Minden egység-négyzetbe a következő számok egyikét
írjuk: -1, 0, vagy 1.

Bizonyítsuk be, hogy a sorok, oszlopok és átlók
összegei között van két egyenlő!

A sorok száma 3, az oszlopok száma szintén 3, és az átlók száma 2.

Így összesen 8 összegünk van. Másrészt a -1, 0, 1 számokból
képezhető lehetséges összegek száma 7.

A lehetséges összegek: -3, -2, -1, 0, 1, 2 vagy 3. Tekintsünk 7, egy-
egy lehetséges összegnek megfelelő fiókot!

A skatulya-elvből következik, hogy a sorok, oszlopok és átlók
összesen 8 összegei közül legalább 2 egyenlő.

Adott egy 100×100 -as, négyzet. Ennek minden mezőjébe beírjuk az 1, 2, 3 számok valamelyikét. Bizonyítsuk be, hogy a sorok, oszlopok és átlók összegei között van két egyenlő!

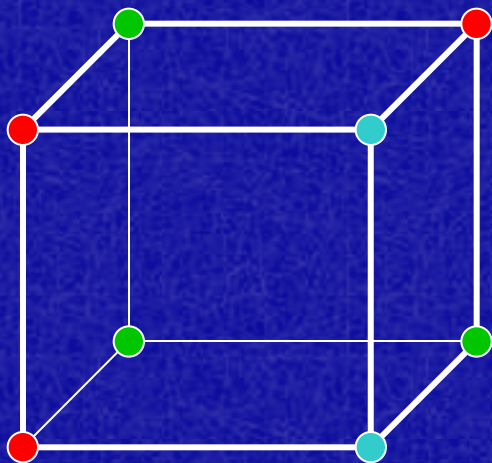
A sorok száma 100, az oszlopok száma szintén 100, és az átlók száma 2. Így összesen 202 összegünk van.

Másrészről az 1, 2, 3 számokból képezhető lehetséges összegek legkisebb értéke 100 (100×1) és a legnagyobb pedig 300 (100×3).

A 100 és 300 között pontosan $300 - 100 + 1 = 201$ szám van

A skatulyaelv alapján $202 > 201$, ezért létezik két egyforma összeg.

Egy egységnyi élű kocka minden csúcsát **pirossal** vagy **kékkel** vagy **zölddel** színezzük ki. Bizonyítsuk be, hogy van 2 olyan egyszínű pont, amelyek távolsága nagyobb mint 1,4 egység.



Mivel 8 csúcs van és 3 szín, ezért a skatulyaelv alapján, mivel $8 = 3 \times 2 + 2$, létezik 3 egyforma színű csúcs, legyen ez **piros**.

Így a felső vagy alsó sík valamelyikébe 2 **piros** jut.

De ekkor a 3 **piros** között biztosan van 2 amelyik egy négyzetátlónyi távolságra bvan egymástól, és ez $> 1,4$ -nél.

Igazoljuk, hogy bármely a, b, c, d egész szám esetén az

$$E = abcd(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)(a^2 - d^2)(b^2 - c^2)(b^2 - d^2)(c^2 - d^2)$$

osztható 7-tel!

Egy x egész számnak a 7-tel való osztási maradékai a $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmaz elemei.

Az xx -nek a 7-tel való osztási maradékai a $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ halmaz elemei.

Ha az a, b, c, d számok valamelyike osztható 7-tel, akkor nyilván E is osztható 7-tel. Más esetekben aa, bb, cc, dd az $\{1, 2, 4\}$ halmaz elemei

Így a *skatulyaelv* alapján aa, bb, cc, dd számok közül biztosan létezik 2, amely ugyanazzal a számmal egyenlő, vagyis különbségük nulla.

Legyenek az a, b, c, d, e, f és g az $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ számok permutációi.

Igazoljuk, hogy az $(a-1)(b-2)(c-3)(d-4)(e-5)(f-6)(g-7)$ páros szám!

Feltételezzük az ellenkezőjét: vagyis, hogy a szorzat páratlan, így mindegyik szorzótényezője páratlan.

Tehát $a-1, c-3, e-5, g-7$ mind páratlanok, ezért a, c, e, g is mind párosok lesznek, de $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ között a párosok csak $2, 4, 6$ ami absurdum.

Egy szabályos húszszög csúcsai mind **kékre** vagy **pirosra** vannak festve. A **piros** csúcsok száma **9**, a **kék** csúcsok száma **11**. Bizonyítsuk be, hogy **legalább 2 kék** csúcs átlósan ellentétesen helyezkedik el!

A fiókok most a szabályos húszszög körülírt körének a csúcsokat tartalmazó átmérői lesznek.

Minden átmérő két ellentétes csúcsot köt össze. Minden fiók korlátolt – mindegyikük legfeljebb 2 pontot tartalmaz, amik az átmérők végei. Számuk 10.

Tekintsük most azokat a fiókokat, amelyekben **legalább egy piros csúcs** van. Számuk maximum 9.

Mivel összesen 10 fiók van, ezért létezik egy fiók, amiben **nincsen piros csúcs**.

Ennek az átmérőnek a végpontjai kékek, és ezzel be is fejeztük a bizonyítást.

Adott 17 pont a síkon úgy, hogy semelyik három sem esik közülük egy egyenesre. Azok a szakaszok, amelyek ezeket a pontokat kötik össze, **kék**, **piros**, vagy **zöld** színűek. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan háromszög, amelynek csúcsai a megadott pontok közül kerülnek ki, és a háromszög egyszínű.

Válasszuk ki az egyik pontot és jelöljük el A-val! Most tekintsük a 16 szakaszt, ami A-ból indul! A skatulya-elvből következik, hogy közülük legalább 6 azonos színű, például **kék** (ha legfeljebb 5 azonos színű szakasz van köztük, akkor összesen legfeljebb $3 \times 5 = 15$ szakaszunk lenne, ami ellentmond a 16-nak). Továbbá tekintsük a 6, A-tól különböző végét a 6 szakasznak! Ha az őket összekötő szakaszok egyikeke, például a B és C pontok között, akkor az ABC háromszög **kék** és készen vagyunk. Tekintsük azt az esetet, mikor a 6 pontot összekötő minden szakasz **piros** vagy **zöld**. Ez a feltétel már az előző feladathoz vezet vissza és így következik belőle egy egyszínű háromszög létezése.

Egy osztályteremben 15 asztal van és minden asztal mellett két szék. 22 diák van jelen a matematika órán. Bizonyítsuk be, hogy legalább 7 asztalnál párosan ülnek a diákok!

Most az asztalok a fiókok, amik korlátozottak, mivel legfeljebb kettő diák ülhet egy asztalnál.

Ha minden asztalnál csak egy diák foglal helyet, akkor a visszamaradó 7 diáknak ($22 - 15 = 7$) 7 asztalhoz kell ülnie, így 7 asztalnál fognak párosan ülni

193 szúnyog ül egy téglalap alakú, $3\text{ m} \times 2\text{ m}$ kiterjedésű füves területen. Meg lehet-e ölni egyszerre legalább 3 szúnyogot egy $25\text{ cm} \times 25\text{ cm}$ -es lapáttal?

A válasz igen. Elegendő a területet 96 darab $25\text{ cm} \times 25\text{ cm}$ -es négyzetre osztani.

A skatulya-elv alapján az egyik ilyen négyzeten legalább 3 szúnyog fog ülni.

Ezután már csak pontosan el kell eltalálni azt a négyzetet.

40 diák versenyzik 6 feladat megoldásán egy kétnapos matematikai olimpián. Bizonyítsuk be, hogy közülük legalább hat ugyanannyi feladatot oldott meg!

Tekintsünk 7 fiókot!

Tegyük az elsőbe azokat a diákokat, akik egy feladatot sem oldottak meg, tegyük a másodikba azokat, akik 1 feladatot oldottak meg, tegyük a harmadikba azokat, akik 2 feladatot oldottak meg, és így tovább, tegyük a hetedikbe azokat, akik 6 feladatot oldottak meg!

Eszerint $40 > 7 \cdot 5 = 35$ ésebből a skatulya-elv szerint következik, hogy lesz olyan fiók, amibe 6 diák kerül.

Adott egy 5×5 -ös négyzet, ami 25 egységnégyzetre van osztva. Tetszőleges módon 26 pont van bejelölve a négyzeten. Mutassuk meg, hogy legalább két pont azonos egységnégyzetre fog esni!

Ebben a feladatban az egységnégyzetek szolgálnak fiókként.

Ha minden fiókban legfeljebb egy pont van, akkor összesen legfeljebb
 $1 \times 25 = 25$ pont van. De a pontok száma 26 és $26 > 25$.

Így a skatulya-elvből következik, hogy egy négyzetbe legalább 2 pont kerül

101 pont van elhelyezve egy 10 cm oldalhosszúságú négyzeten. Bizonyítsuk be, hogy van két olyan pont, amelyek távolsága kevesebb, mint 2 cm!

Kihasználhatjuk, hogy a négyzet egymástól legtávolabb lévő pontjai az átfogók végei.

Osszuk fel a megadott négyzetet 100 kisebb, 1 cm oldalhosszúságú négyzetre.

Így most a 100 kisebb négyzet lesz a 100 fiók, és így a skatulya-elvből következik, hogy legalább két pont egy kis négyzetbe fog esni.

Tekintsünk két ilyen pontot. A közöttük levő távolság kisebb mint a négyzet átlója, az-az $1,418... < 2$

Adott 7 pont egy 16 egység-négyzetből álló négyzeten. Bizonyítsuk be, hogy vagy van olyan 4 egység-négyzetből álló négyzet, ami 3 pontot tartalmaz legalább, vagy van olyan 3, összesen 12 egység-négyzetből álló négyzet, úgy hogy mindegyik 4 egység-négyzetből áll és mindegyik legalább 2 pontot tartalmaz.

Osszuk fel az eredeti négyzetet 4 darab 2×2 -es négyzetre! Ez a 4 négyzet fog most fiókként szolgálni. A skatulya-elv szerint legalább az egyikük nem kevesebb, mint 2 pontot tartalmaz. Ha több mint 2 pontot tartalmaz, akkor készen vagyunk. Legyen a pontok száma pontosan 2! A visszamaradó 5 pont a másik 3 darab 2×2 -es négyzetben helyezkedik el. A skatulya-elv szerint megint legalább az egyikük nem kevesebb, mint 2 pontot tartalmaz. Ha több mint 2 pontot tartalmaz, akkor készen vagyunk. Ellenkező esetben a pontok száma pontosan 2. Így 2 darab 2×2 -es négyzetünk van, és mindegyik 2 pontot tartalmaz. A visszamaradó 3 pont a maradék 2 darab 2×2 -es négyzetben helyezkedik el. Használjuk a skatulya-elvet harmadszorra is! Így következik, hogy a négyzetek egyike nem kevesebb, mint 2 pontot tartalmaz. Ha a pontok száma 3, készen vagyunk. Ha a pontok száma 2, akkor megkaptuk a harmadik 2×2 -es négyzetet is, ami 2 pontot tartalmaz.

Legyen a , b és c három egész szám! Bizonyítsuk be,
hogy az $abc(b - a)(c - a)(c - b)$ szorzat osztható 6-tal!

A szorzat utolsó három tényezője a három számból minden lehetséges módon kiválasztható párok különbsége.

A három egész szám közül legalább kettő azonos paritású, ezért a különbségek egyike biztosan páros, azaz a szorzat osztható 2-vel.

Továbbá, ha legalább az egyik egész szám osztható 3-mal, a szorzat is osztható 3-mal, ellenkező esetben (ha egyik szám sem osztható hárommal) lesz két olyan szám, amelyek 3-mal osztva azonos (1-es vagy 2-es) maradékot adnak, és így a különbségük lesz osztható 3-mal.

Legyenek az a, b, c és d számok egész számok.

Bizonyítsuk be, hogy a következő szorzat:

$(b - a)(c - a)(d - a)(c - b)(d - b)(d - c)$ osztható 12-vel.

A fentebb felírt szorzat 6 tényezője a 4 egész számból minden lehetséges módon képezett párokból áll.

A skatulya-elv értelmében a négy szám közül legalább kettőnek megegyezik a 3-mal való osztási maradékaik. Így a különbségük 3 többszöröse.

Ezután vagy legalább 3 szám azonos paritású, és ebben az esetben 3 különbség páros, vagy a 4 szám olyan, hogy közülük kettő páros és kettő páratlan.

Hét ember egyszerre vásárol egy boltban. Bizonyítsuk be, hogy közülük legalább kettőnek azonos számú ismerősük van többiek közül!

Minden embernek 0, 1, 2, 3, 4, 5 vagy 6 ismerőse van a többiek közül a boltban. De ha van egy ember 0 ismerőssel, azaz senkit sem ismer a boltban, akkor a reflexivitás miatt nem lehet senkinek sem 6 ismerőse a boltban. Így az ismerősök számától függően minden ember 6 csoportba osztható be, azaz 6 fiókba helyezhető el. Két eset lehetséges, tekintsük a csoportokat egy lehetséges rendezés, az ismerősök számának a növekvő sorrendje szerint. Az első esetben a 0 ismerőssel rendelkező emberek esnek az első csoportba, az 1 ismerőssel rendelkező emberek esnek a második csoportba, és így tovább 2 ismerős - a harmadik csoport, 3 ismerős - a negyedik csoport, 4 ismerős - az ötödik csoport, és 5 ismerős - a hatodik csoport. A második esetben az 1 ismerőssel rendelkező emberek esnek az első csoportba, 2 ismerőssel rendelkező emberek esnek a második csoportba, és így tovább, 3 ismerős - harmadik csoport, 4 ismerős - negyedik csoport, 5 ismerős - ötödik csoport, és 6 ismerős - a hatodik csoport. Mindkét esetben a csoportok száma 6, míg a vásárlók száma 7. Így a megoldás következik a skatulya-elvből.

Tizenhat csapat játszik egy futball versenyen, ahol mindenki játszik mindenki ellen. Bizonyítsuk be, hogy minden meccs után van legalább két csapat, akik ugyanannyi meccset játszottak.

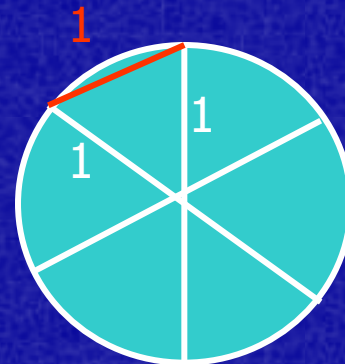
Az előző problémához hasonló módon elegendő észrevenni, hogy amennyiben van egy csapat, aki 0 meccset játszott, akkor nem lehet olyan csapat, aki 15 meccset játszott. Ebből következik, hogy 15 fiókot tekinthetünk, a meccsek száma szerint. Ezután már elegendő használni a skatulya-elvet. Mint az előző feladatnál is, a résztvevő csapatok száma itt sem fontos.

A fenti probléma egy egyedi esete az úgy nevezett
"ismerősök problémának", ami szerint:

Minden n emberből álló csoportban esetén létezik legalább két ember, akiknek azonos számú ismerősük van a többiek között a csoportban.

Az egység sugarú körlapon elhelyeztünk 7 pontot. Igazoljuk, hogy van közöttük 2, amelyek távolsága nem nagyobb 1-nél.

Osszuk a kör területét 6 egyenlő részre. Így 6 körcikkünk lesz, és 7 pont, ezért a skatulya elv alapján létezik 2 pont amelyik ugyanabba a hatod körcikkbe jut, De ekkor a távolságuk nem nagyobb mint 1.

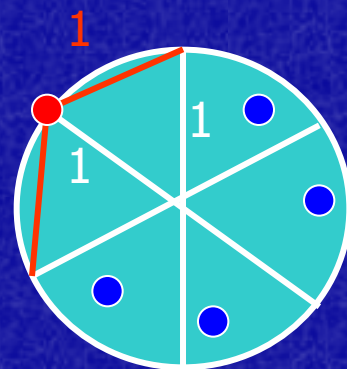


Az egység sugarú körlapon elhelyeztünk 6 pontot. Igazoljuk, hogy van közöttük 2, amelyek távolsága nem nagyobb 1-nél.

Rögzítsük a kör kerületén az egyik pontot, és így osszuk a kört 6 egyenlő részre. Így 6 körívünk lesz, és még 5 pont.

Amennyiben valamelyik pont valamelyik szomszédos körcikkbe jutnának, a feladat megoldott.

De ha egy sem jut ezekbe, akkor van 5 pontunk és 4 másik körcikk. Ezért a skatulya elv alapján valamelyikre 2 pont kerül, és ekkor megint megoldottuk a feladatot.



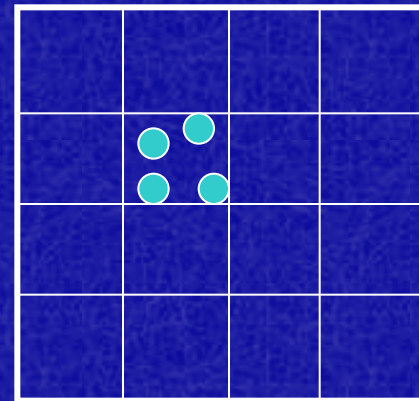
Legyenek az a, b, c, d, e, f, g, h és i az $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ számok permutációi. Igazoljuk, hogy az $(a-1)(b-2)(c-3)(d-4)(e-5)(f-6)(g-7)(h-8)(i-9)$ páros szám!

Feltételezzük az ellenkezőjét: vagyis, hogy a szorzat páratlan, így mindegyik szorzótényezője páratlan.

Tehát $a-1, c-3, e-5, g-7, i-9$ mind páratlanok, ezért a, c, e, g, i is mind párosok lesznek, de $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ között a párosok csak $2, 4, 6, 8$ ami csak négy szám, absurdum.

Egy négyzet alakú 1 m×m céltáblát 49 találat ért.
Bizonyítsd be, hogy van 4 olyan találati pont, amelyek
közül bármely 2-nek a távolsága kisebb mint 36 cm.

Osszuk fel a négyzetet $4 \times 4 = 16$
kisnégyzetre. Mivel 16
tartomány és $49 = 3 \times 16 + 1$ pont
van, ezért a skatulya elv
alapján az egyikbe biztosan
lesz legkevesebb $3 + 1 = 4$ pont.



És mivel egy kisnégyzet átlójának a hossza $25\sqrt{2} < 36$
Ezért a feladatot megoldottuk.

44 királynő van elhelyezve egy 8×8 -as sakktáblán. Mutassuk meg, hogy bármelyik királynő legalább egy másikat ütni fog!

Megoldás: Minden királynő legalább 21 mezőt ural. Azt a mezőt is figyelembe véve, amelyen a királynő áll, összesen 22 ellenőrzés alatt álló mezőt kapunk. Tegyük fel, hogy létezik olyan királynő, amely egyetlen másikat sem üt! A visszamaradó mezők száma: $64 - 22 = 42$. De nekünk 43 másik királynőnk van, így a skatulya-elv értelmében következik, hogy legalább az egyikük a tekintett királynő által ütésben tartott mezőkön helyezkedik el. Ez egy ellentmondás.

Az 1-től 10 -ig terjedő természetes számokat tetszőleges sorrendben egymás alá írjuk egy oszlopban. Minden számot összeadunk az oszlopban elfoglalt helyét jelölő sorszámmal. Igazolja, hogy legalább két ilyen összeg ugyanazzal a számjeggyel végződik.

Megoldás: Tegyük fel, hogy ezek az összegek mind különböző számjegyen végződnek.

Ezek szerint az összegek utolsó számjegyei közt a 0, 1, ..., 9 mindegyike pont egyszer fordul elő. Ellenkező esetben a skatulya elv szerint két különböző összeg ugyanarra a számjegyre végződik. Ebből az következik, hogy az adott összegeket összeadva, ezek összege ugyanarra a számjegyre végződik, mint az $1 + 2 + \dots + 9 = 45$ összeg, tehát az 5-re. Másrészt az 1-től 10-ig terjedő egészek összege 55. Az oszlopban elfoglalt helyüket jelző sorszámmak összege is 55. Tehát ennek a kettőnek az összege, a 110, a 0-ra végződik. Ez ellentmond a feltételnek.

Adottak az $1, 2, \dots, 200$ számok, és kiválasztunk 101-et közülük. Igazolja, hogy a kiválasztott számok között van legalább két olyan, amelyek közül az egyik a másoknak osztója.

Ha az a egy 200-nál kisebb páratlan szám, jelöljük az $\{a, 2a, 4a, 8a, 16a, 32a, 64a, 128a\}$ halmazt A -val. Az 1 és 200 közti egész számok mindegyikére létezik egy olyan páratlan egész $a < 200$ amelyre a megfelelő A tartalmazza az adott számot. Mivel 100 ilyen különböző A halmaz lehetséges (az 1 és 200 közti páratlan egészek száma 100) és a feladat szerint 101 egészet választunk ki, a skatulya elv szerint, legalább két kiválasztott egész szám ugyanabba az A halmazba tartozik. Másrészt bármely két szám közül, amelyek ugyanabba az A halmazba tartoznak az egyik a másiknak osztója

Adott a 10×10 -es sakktábla, és úgy írunk pozitív egészeket a sakktábla mezőire, hogy bármely két függőleges, vagy vízszintes szomszéd különbsége ne haladja meg az 5-öt. Igazolja, hogy legalább két szomszéd egyenlő lesz.

Jelölje a és b a sakktáblára írt legnagyobb és legkisebb számot. Ha nincs két egyenlő köztük, akkor $a - b \geq 99$. Kössük most össze az a és b számokat tartalmazó mezőket a lehető legrövidebb olyan utat tartalmazó lépésekkel, amely csak vízszintes és függőleges irányba halad a mezőkön. A lehető leghosszabb ilyen út 18 lépést jelenthet, (9 vízszintes és 9 függőleges lépés). Ez azt is jelenti, hogy az a úgy érhető el a b -ből, hogy 18-szor legfeljebb 5-el növelem az adott számot, vagyis $a \leq b + 18 \cdot 5$. Következik, hogy $b + 90 \geq b + 99$. Ez nyilván lehetetlen, tehát legalább két szomszédos szám egyenlő kell legyen.

Az 1 -től 16-ig terjedő egészeket leírjuk az 4×4 sakktábla mezőire úgy, hogy van legalább 2 olyan, szomszédos oldallal rendelkező mező, amelyben a számok különbsége nem kevesebb mint 4.

1	2	*	
3	*		
*			*
		*	4

Helyezzük el az ábra szerint az 1, 2, 3, 4 számokat és jelöljük csillaggal a szóba jöhető szomszédjaikat. Függetlenül attól, hogy az 1, 2, 3, 4 hogyan helyeztük el, a csillagok száma nem lehet kevesebb, mint 4.

A skatulya elv alapján legalább egy csillag helyére olyan szám kerül, ami nem lehet kisebb, mint 8(ugyanis a szóba jöhető 5, 6 és 7 mindössze 3 csillagot foglal le). Ezzel kész a bizonyítás.

Egy szabályos ikoszagon (20 oldalú sokszög – iko a görög nyelven húszat jelent) 9 csúcsa pirosra van festve. Igazolja, hogy van olyan piros csúcsú háromszög, amely egyenlő szárú.

Számozzuk az ikoszagon csúcsait 1-től 20-ig az óramutató járásával megegyező irányban. Ezek közt azok a csúcsok, amiket 1, 5, 9, 13 és 17; amiket 2, 6, 10, 14 és 18; amiket 3, 7, 11, 15 és 19; és amiket 4, 8, 12, 16 és 20 jelöl, 4 szabályos ötszöget határoznak meg. Mivel 9 csúcsot festettünk pirosra, a skatulya elvből következik, hogy a 9 csúcs közül legalább 3 ugyanahhoz az ötszöghöz tartozik. Másrészt egy szabályos ötszög bármely 3 csúcsa egy egyenlő szárú háromszöget alkot.

Egy 6×6 négyzet 36 zárt egységnégyzetre bontható (az oldalai pontjait is hozzávesszük). Számítsa ki az olyan egységnégyzeteknek a maximális számát, amelyek úgy festhetők ki kékre, hogy két kék egységnégyzetnek nincs közös pontja (csúcsoknál sem).

Osszuk fel a négyzetet 9 darab 2×2 négyzetre, amik a skatulyák lesznek. Egy ilyen skatulya nem tartalmazhat egynél több kékre festett négyzetet. Következik, hogy a keresett szám legfeljebb 9.

X		X		X	
X		X		X	
X		X		X	

Az alábbi példa egy lehetőséget szemléltet, amiben a kék négyzeteket X jelöli:

Adott egy 1 oldalú négyzet és abban 101 pont, amelyek közt bármely 3 nem kollineáris. Igazolja, hogy van köztük 3 amelyek egy olyan háromszöget alkotnak, aminek a területe nem nagyobb, mint 0,01.

Osszuk fel a négyzetet 50 egybevágó téglalapra. Ez megtehető például ha a négyzet egyik oldalát 10 egyenlő részre osztjuk, és a szomszédos oldalát 5 egyenlő részre osztjuk, majd az oldalakkal párhuzamosan felosztjuk a négyzetet 50 egybevágó téglalapra, amelyeknek a méretei $0,2 \times 0,1$. A skatulyaelv alapján, legalább három pont esik legalább az egyik ilyen téglalapra. De egy téglalapba írt háromszög területe nem haladhatja meg a téglalap területének a felét, vagyis a konkrét példában a 0,01 értéket.

Keressük meg a tört értékét, ha különböző betűk különböző, azonos betűk azonos **számjegyeket** jelölnek!

$$\frac{D \times I \times R \times I \times C \times H \times L \times E \times T}{P \times R \times I \times N \times C \times I \times P \times L \times E}$$

Az előforduló különböző betűk: D, I, R, C, H, L, E, T, P, N éppen 10 betű.
Összesen 10 számjegyünk van: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 és a nevezőben nem lehet 0, azért a számláló valamelyik betűje a 0, így a tört értéke 0.

Vége