

**Examenul de bacalaureat 2012**  
**Proba E.c)**  
**Proba scrisă la MATEMATICĂ**

**Varianța 7**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*  
*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**I. TETEL**

**(30 punct)**

- 5p** 1. Határozd meg azt az  $m$  valós számot, amelyre az  $A = \{2\}$  és  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + mx + 4 = 0\}$  halmazok egyenlőek!
- 5p** 2. Határozd meg az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 3x + 2$  függvényhez rendelt parabola csúcspontjának koordinátáit!
- 5p** 3. Oldd meg a valós számok halmazán a  $3^{\log_3 x} < 1$  egyenlőtlenséget!
- 5p** 4. Határozd meg annak valószínűségét, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott 2 jegyű szám csak páratlan számjegyeket tartalmazzon!
- 5p** 5. Határozd meg azt az  $a$  valós számot, amelyre az  $\vec{u} = 3\vec{i} + a\vec{j}$  és  $\vec{v} = a\vec{i} + (2a - 3)\vec{j}$  vektorok kollineárisak!
- 5p** 6. Határozd meg az  $ABC$  háromszög köré írt körének sugarát, ha  $AB = AC = 5$  és  $BC = 6$ .

**II. TETEL**

**(30 punct)**

1. Az  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  halmazban tekintsük az  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  és  $A(x) = \begin{pmatrix} \cos x & 0 & i \sin x \\ 0 & 1 & 0 \\ i \sin x & 0 & \cos x \end{pmatrix}$  mátrixokat, ahol  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** a) Számítsd ki a  $\det(A(\pi))$  értékét!
- 5p** b) Igazold, hogy  $A(x) \cdot A(y) = A(x + y)$  bármely  $x, y \in \mathbb{R}$  esetén!
- 5p** c) Határozd meg azokat az  $x$  valós számokat, amelyekre  $(A(x))^{2012} = I_3$ .
2. A  $G = (0, 1)$  halmazon értelmezzük az  $x \circ y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}$  asszociatív műveletet.
- 5p** a) Igazold, hogy  $e = \frac{1}{2}$  a „ $\circ$ ” művelet semleges eleme!
- 5p** b) Igazold, hogy a  $G$  halmaz minden eleme szimmetrizálható a „ $\circ$ ” műveletre vonatkozóan!
- 5p** c) Igazold, hogy az  $f: G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ,  $f(x) = \frac{1}{x} - 1$  függvény egy izomorfizmus a  $(G, \circ)$  és az  $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$  csoportok között!

**III. TETEL**

**(30 punct)**

1. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  függvény.
- 5p** a) Számítsd ki a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{f(x)}$  határértéket!
- 5p** b) Igazold, hogy az  $f$  függvény konvex az  $\mathbb{R}$  halmazon!
- 5p** c) Igazold, hogy a  $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f(\sqrt{x})$  függvény szigorúan növekvő a  $(0, +\infty)$  halmazon!
2. Minden zérótól különböző  $n$  természetes szám esetén tekintsük az  $I_n = \int_0^1 x^n \cdot \sqrt{1-x^2} dx$  és  $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$  számokat.
- 5p** a) Számítsd ki  $J_1$  értékét!
- 5p** b) Számítsd ki  $I_1$  értékét!
- 5p** c) Igazold, hogy  $J_{2n} - J_{2n+2} = I_{2n}$  bármely zérótól különböző  $n$  természetes szám esetén!