

**Examenul de bacalaureat 2012**  
**Proba E.c)**  
**Proba scrisă la MATEMATICĂ**

**Varianta 9**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*  
*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**I. TÉTEL**

**(30 punct)**

- 5p** 1. Igazold, hogy  $\log_2(\sqrt{7} + \sqrt{3}) + \log_2(\sqrt{7} - \sqrt{3}) = 2$ .
- 5p** 2. Számítsd ki az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + 5x + 4$  függvény grafikus képe az  $Ox$  tengellyel való metszéspontjai közti távolságot!
- 5p** 3. Oldd meg a valós számok halmazán a  $3^x + 3^{x+1} = 4$  egyenletet!
- 5p** 4. Határozd meg az  $\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{20}$ ,  $x > 0$  binom kifejtésében az  $x^{14}$ -t tartalmazó tag sorszámát!
- 5p** 5. Határozd meg az  $A(3,3)$  ponton átmenő, és a  $3x + 2y - 1 = 0$  egyenletű  $d$  egyenessel párhuzamos egyenes egyenletét!
- 5p** 6. Határozd meg az  $ABC$  háromszög  $C$  szögének mértékét, ha  $BC = 2$ ,  $AB = \sqrt{2}$  és a  $BAC$  szög mértéke  $45^\circ$ .

**II. TÉTEL**

**(30 punct)**

1. Adott az  $\begin{cases} -x + ay + (2a + 4)z = 1 \\ (a + 2)x + ay + (a + 1)z = 1 \\ (a + 1)x + (2a - 1)y + 3z = 2 \end{cases}$  egyenletrendszer, ahol  $a \in \mathbb{R}$ .
- 5p** a) Igazold, hogy az egyenletrendszer mátrixának determinánsa  $3a^3 + 9a^2 - 3a - 9$ .
- 5p** b) Határozd meg az  $a$  azon valós értékeit, amelyekre az egyenletrendszer összeférhető, határozott!
- 5p** c)  $a = -2$  esetén oldd meg az egyenletrendszert!
2. Adott az  $f = X^8 + 4X^4 + \hat{3}$ ,  $f \in \mathbb{Z}_5[X]$  polinom.
- 5p** a) Igazold, hogy  $a^5 = a$  minden  $a \in \mathbb{Z}_5$  esetén!
- 5p** b) Igazold, hogy  $f$  reducibilis  $\mathbb{Z}_5$ -ben!
- 5p** c) Igazold, hogy az  $f$  polinomnak nincs gyöke  $\mathbb{Z}_5$ -ben!

**III. TÉTEL**

**(30 punct)**

1. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ ,  $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$  függvény.
- 5p** a) Számítsd ki a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x}$  határértéket!
- 5p** b) Írd fel az  $f$  függvény grafikus képe  $+\infty$ -be tartó ága ferde aszimptotájának egyenletét!
- 5p** c) Igazold, hogy bármely  $m > 0$  valós szám esetén az  $f(x) = m$  egyenletnek egyetlen megoldása van  $\mathbb{R}$ -ben!
2. Minden zérótól különböző  $p$  természetes szám esetén tekintsük az  $I_p = \int_0^1 x^p e^{x^2} dx$  számot.
- 5p** a) Számítsd ki  $I_1$ -et!
- 5p** b) Igazold, hogy  $2I_p + (p - 1)I_{p-2} = e$  minden  $p \geq 3$  esetén!
- 5p** c) Számítsd ki a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \left( e^{\frac{1^2}{n^2}} + 2e^{\frac{2^2}{n^2}} + \dots + ne^{\frac{n^2}{n^2}} \right)$  határértéket!