

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

I. FELADAT **(30 pont)**

- 5p** 1. Igazold, hogy $(\sqrt{2}, \sqrt{5}) \cap \mathbb{Z} = \{2\}$.
- 5p** 2. Határozd meg az m azon valós értékeit, amelyekre az $x = 2$ egyenes az $y = x^2 + mx + 4$ parabola szimmetriatengelye!
- 5p** 3. Oldd meg a $[0, 2\pi)$ halmazon a $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ egyenletet!
- 5p** 4. Határozd meg az $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ azon értékét, amelyre $C_n^2 + A_n^2 = 18$.
- 5p** 5. Határozd meg az $a \in \mathbb{R}$ azon értékét, amelyre a $d_1: ax + y + 2011 = 0$ és $d_2: x - 2y = 0$ egyenesek párhuzamosak!
- 5p** 6. Adott az x valós szám, amelyre $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$. Igazold, hogy $\sin 2x = 1$!

II. FELADAT **(30 pont)**

1. Adott az $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix, ahol $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** a) Igazold, hogy bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $A(x) \cdot A(y) = A(x + y)$.
- 5p** b) Igazold, hogy bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $(A(x) - A(y))^{2011} = O_3$!
- 5p** c) Határozd meg az $A(x)$ mátrix inverzét, $x \in \mathbb{R}$.
2. Adott az $\alpha \in \mathbb{C}$ szám és az $f = X^3 + (1 - \alpha)X^2 + (\alpha - 2)iX + \alpha + (\alpha - 2)i \in \mathbb{C}[X]$ polinom.
- 5p** a) Igazold, hogy -1 gyöke az f polinomnak!
- 5p** b) Ha p, q komplex számok és a $g = X^2 + pX + q \in \mathbb{C}[X]$ polinomnak két különböző konjugált komplex gyöke van, igazold, hogy p és q valós számok és $p^2 < 4q$.
- 5p** c) Határozd meg az $\alpha \in \mathbb{C}$ azon értékét, amelyre az f polinomnak két különböző konjugált komplex gyöke van!

III. FELADAT **(30 pont)**

1. Adott az $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x + 1) - \ln(x - 1)$ függvény.
- 5p** a) Igazold, hogy az f függvény szigorúan csökkenő az $(1, +\infty)$ intervallumon!
- 5p** b) Határozd meg az f függvény grafikus képének aszimptotáit!
- 5p** c) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x)$ határértéket!
2. Adott az $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$ függvény.
- 5p** a) Számítsd ki $\int_1^4 f(\sqrt{x}) dx$ értékét!
- 5p** b) Számítsd ki a $g: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ függvény grafikus képe és az Ox tengely által határolt síkidom területét!
- 5p** c) Igazold, hogy $(4n + 2) \int_1^2 f^n(x) dx + n \int_1^2 f^{n-1}(x) dx = 0$.