

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

I. FELADAT **(30 pont)**

- 5p** 1. Számítsd ki a $(b_n)_{n \geq 1}$ pozitív tagú mértani haladvány állandó hányadosát, ha $b_1 + b_2 = 6$ és $b_3 + b_4 = 24$.
- 5p** 2. Határozd meg azt az $a \in \mathbb{R}$ számot, amelyre az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (1 - a^2)x + 4$ függvény állandó!
- 5p** 3. Oldd meg a valós számok halmazán a $\left(\frac{3}{2}\right)^x < \left(\frac{2}{3}\right)^x$ egyenlőtlenséget!
- 5p** 4. Határozd meg az $(1 + \sqrt{2})^{10}$ kifejtése racionális tagjainak számát!
- 5p** 5. Számítsd ki az $A(2, 2)$ pontnak a $B(1, 0)$ és $C(0, 1)$ pontok által meghatározott egyenestől mért távolságát!
- 5p** 6. Az ABC háromszögben az A szög mértéke 60° , $AB = 4$ és $AC = 5$. Számítsd ki: $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$.

II. FELADAT **(30 pont)**

1. Adott a $H = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A^2 = A\}$ halmaz.
- 5p** a) Igazold, hogy $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in H$.
- 5p** b) Ha $A \in H$, igazold, hogy $A^n \in H$, bármely n zérótól különböző természetes szám esetén!
- 5p** c) Igazold, hogy a H halmaz végtelen!
2. Az $f = (X + i)^{10} + (X - i)^{10}$ polinom algebrai alakja $f = a_{10}X^{10} + a_9X^9 + \dots + a_1X + a_0$, ahol $a_0, a_1, \dots, a_{10} \in \mathbb{C}$.
- 5p** a) Számítsd ki az f polinomnak az $X - i$ polinommal való osztási maradékát!
- 5p** b) Igazold, hogy az f polinom minden együtthatója valós szám!
- 5p** c) Igazold, hogy az f polinom minden gyöke valós szám!

III. FELADAT **(30 pont)**

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 - 5x + 4$ függvény.
- 5p** a) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ határértéket!
- 5p** b) Igazold, hogy az f függvény grafikus képének van egy inflexiós pontja!
- 5p** c) Igazold, hogy bármely $m \in (0, 8)$ esetén az $f(x) = m$ egyenletnek pontosan három különböző valós gyöke van!
2. Adott a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^{-x}$ függvény.
- 5p** a) Számítsd ki $\int_0^1 g(x) dx$ értékét!
- 5p** b) Számítsd ki $\int_0^1 x^5 g(x^3) dx$ értékét!
- 5p** c) Igazold, hogy az $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_1^n g(x^3) dx$ sorozat konvergens!