

Soluție:

1. a) Se arată că $B^3 = I_3$

b) $B^{-1} = B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

c) Obținem $(a+b+c) \cdot \det(A) = \frac{1}{2} \cdot (a+b+c)^2 \cdot \left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \right) \geq 0.$

2. a) Calcul direct.

b) $\hat{0} = \hat{0}^2 + \hat{0}^2, \hat{1} = \hat{0}^2 + \hat{1}^2, \hat{2} = \hat{1}^2 + \hat{1}^2, \hat{3} = \hat{1}^2 + \hat{3}^2, \hat{4} = \hat{0}^2 + \hat{2}^2, \hat{5} = \hat{1}^2 + \hat{2}^2, \hat{6} = \hat{2}^2 + \hat{3}^2.$

c) Se arată inductiv că $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left\{ x^{2n} \mid x \in \mathbb{Z}_7 \right\} = H$, de unde rezultă concluzia.