

Soluție

1. a) Dacă $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$, ecuația e echivalentă cu sistemul $\begin{cases} x - 2y - z = 2 \\ 2x + 2y = 1 \\ x + 4y - 3z = 5 \end{cases}$. Sistemul este

compatibil nedeterminat, deoarece rangul matricei sistemului este egal cu 2, ca și rangul matricei extinse.

b) Calcul direct.

c) Se arată că $A^* = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 2 \\ 6 & -2 & -2 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Rezultă $\text{rang}(A^*) = 1$.

2. a) $7^2 - 2 \cdot 5^2 = -1$, deci $7 + 5\sqrt{2} \in A$

b) Calcul direct.

c) Avem $f(7 + 5\sqrt{2}) = -1$. Mai mult, $f\left((7 + 5\sqrt{2})^{2n+1}\right) = \left(f(7 + 5\sqrt{2})\right)^{2n+1} = -1, \forall n \in \mathbb{N}$,

iar șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left((7 + 5\sqrt{2})^{2n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ are termenii distincți, în $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.