

Soluție

1. Fie $a = \sqrt{2}$ și $b = -\sqrt{2}$. Avem $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ și $a + b = 0 \in \mathbb{Q}$. Afirmația din enunț este falsă.
2. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ unde $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $a \neq 0$. Avem $f(1) = -3$, $f(-1) = 3$, $f(0) = 1$ și rezolvând sistemul obținem $a = -1$, $b = -3$, $c = 1 \Rightarrow f(x) = -x^2 - 3x + 1$.

Vârful parabolei este $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$, adică $V\left(-\frac{3}{2}, \frac{13}{4}\right)$.

3. Notăm $2^x = y$ și obținem ecuația $y^2 - y - 12 = 0$ cu soluțiile $y_1 = -3$ și $y_2 = 4$.

$2^x = -3$ nu are soluții, iar $2^x = 4 \Leftrightarrow x = 2$.

4. Produsul cartezian $A \times A$ are 36 de elemente: $A \times A = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 6)\}$.

Fie $(a, b) \in A \times A$. Produsul $a \cdot b$ este impar dacă și numai dacă a și b sunt impare.

Cazurile favorabile sunt: $(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3)$ și $(5, 5)$.

Probabilitatea cerută este $\frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0,25$.

5. Mijlocul diagonalei $[AC]$ este $M(0, 2)$, iar panta dreptei AC este 1. BD este mediatoarea lui $[AC]$. Ecuația dreptei BD este $y = -x + 2$. Fie $B(a, b)$ și $D(c, d) \Rightarrow b = -a + 2$, $d = -c + 2 \Rightarrow b - d = -(a - c)$.

Cum $M(0, 2)$ este mijlocul lui $[BD] \Rightarrow a + c = 0$ și $b + d = 4$, iar din $BD = AC \Rightarrow (a - c)^2 + (b - d)^2 = 8$.

Se obține $B(-1, 3)$ și $D(1, 1)$ sau invers, $B(1, 1)$ și $D(-1, 3)$.

6. Avem $\sin 105^\circ = \sin(45^\circ + 60^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 60^\circ + \cos 45^\circ \cdot \sin 60^\circ$.

Rezultă că $\sin 105^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.