

Soluție

1.a) $f(A) = A^2 = 0_2$

1.b) $f(f(X)) = f(AX) = A^2X = 0_2$

1.c) Presupunem $f(X) + f(Y) = I_2 \Rightarrow A(X + Y) = I_2$ și aplicăm pe $f \Rightarrow f(A(X + Y)) = f(I_2) \Rightarrow A^2(X + Y) = A \Rightarrow 0_2 = A$, contradicție.

2a) $A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow AA^t = I_2$, deci $A \in P$

2.b) Fie $A, B \in P, A \cdot A^t = I_2 \Rightarrow \det(A \cdot A^t) = 1 \Rightarrow \det(A) \cdot \det(A^t) = 1 \Rightarrow \det(A) \neq 0$

$\Rightarrow A$ inversabilă $\Rightarrow A^t = A^{-1} \Rightarrow P = GL_2(\mathbb{R}) = grup$

2.c) $X = A^{-1} \cdot B; \det(X) = (\det A^{-1}) \cdot (\det B) \neq 0 \Rightarrow X \in GL_2(\mathbb{R}) = P$.