

Soluție

1. $\frac{7}{5\sqrt{2}-1} = \frac{7(5\sqrt{2}+1)}{50-1} = \frac{5\sqrt{2}+1}{7} \in (1, 2) \Rightarrow \left\lceil \frac{7}{5\sqrt{2}-1} \right\rceil = 1.$

2. $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} = \frac{(-1)^2 - 2(-1)}{-1} = -3 \in \mathbb{Z}.$

3. Ecuația este echivalentă cu $2 \cdot 3^x + \frac{3}{3^x} = 7$. Făcând substituția $y = 3^x$ obținem ecuația $2y^2 - 7y + 3 = 0$

cu soluțiile 3 și $\frac{1}{2}$. Avem $3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1$, iar $3^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\log_3 2$.

4. Funcția f este strict crescătoare $\Leftrightarrow f(1) < f(2) < f(3) < f(4)$.

Orice submulțime a lui B poate fi ordonată crescător într-un singur mod. Numărul funcțiilor strict crescătoare $f: A \rightarrow B$ este egal cu numărul submulțimilor cu 4 elemente ale mulțimii B , adică $C_6^4 = 15$.

5. Ecuația dreptei BC este $2x - y + 5 = 0$. Lungimea înălțimii duse din vârful A în triunghiul ABC este

$$d(A, BC) = \frac{|2 \cdot 1 - 3 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

6. $E = 2(\sin 75^\circ - \sin 15^\circ) = 4 \sin \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} \cos \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} = 4 \sin 30^\circ \cos 45^\circ = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$