

rezolvare

1a) $|f(x)| \leq x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$

b) $f'(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \Rightarrow y = 1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

2a) $I_2 = \int_{-1}^1 (1 - 2x^2 + x^4) dx = \frac{1}{15}.$

b) $I_n - I_{n+1} = \int_{-1}^1 x^2 (1 - x^2)^n dx = -x \frac{(1 - x^2)^{n+1}}{2(n+1)} \Big|_{-1}^1 + \frac{1}{2(n+1)} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^{n+1} dx = \frac{1}{2(n+1)} I_{n+1}.$

c) $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1} = \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx = I_n$, iar șirul $(I_n)_n$ tinde descrescător către 0.