

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p)

1. Tetszőlegesen n nullától különböző természetes szám esetén értelmezzük az

$$f_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^n + \ln x \text{ függvényt.}$$

5p a) Igazold, hogy az f_2 függvény szigorúan növekvő a $(0, \infty)$ intervallumon!

5p b) Igazold, hogy bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, az $f_n(x) = 0$ egyenletnek

5p egyetlen valós megoldása van az $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ intervallumban!

5p c) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{f_2(x) - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$ határértéket!

2. Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^3, & x \in (-\infty, 0] \\ 1 + \sin x, & x \in (0, \infty) \end{cases}$ függvény.

5p a) Igazold, hogy az f függvény integrálható a $[-2\pi, 2\pi]$ intervallumon!

5p b) Számítsd ki az $\int_{-1}^{\pi} f(x) dx$ értékét!

5p c) Igazold, hogy bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén $\int_0^{2\pi} f^n(x) dx \leq 2^n \pi$.