

**Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**Soluții**

1.a) Motiveaza ca  $f$  este derivabila pe  $\mathbb{R} - \{0\}$   $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$ , deci are loc cerinta.

b)  $f'(x) = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x} \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right), x \in \mathbb{R} - \{0\}$  Limita ceruta este egala cu 0.

c) Cum  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$  va exista un numar  $\alpha > 0$ , astfel incat  $f(x) \in (0, 2), \forall x > \alpha$ . Functia  $f$  fiind continua pe  $[0, \alpha]$ , va fi marginita pe acest interval, deci  $f$  este marginita pe  $[0, \infty)$ . Deoarece  $f$  este o functie para, va rezulta concluzia.

$$2.a) \int_0^1 (1-x)^2 dx = \left. \frac{-(1-x)^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

b) Cu substitutia  $1-x=t$ , se obtine  $\int_0^1 x(1-x)^n dx = \int_0^1 (t^n - t^{n+1}) dt = \left( \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2} \right) \Big|_0^1$ , de

unde rezulta cerinta.

$$c) \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx = -n \cdot \left. \frac{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n+1}}{n+1} \right|_0^1 = \frac{-n}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} + \frac{n}{n+1}, \text{ de unde rezulta ca limita}$$

ceruta este egala cu  $1 - \frac{1}{e}$ .