

Soluție

1. a) Calcul direct.

b) Sistemul este compatibil determinat. Se obține soluția $x = \frac{c-b}{\det(A)}$, $y = \frac{a-c}{\det(A)}$, $z = \frac{a-c}{\det(A)}$.

c) Avem că rangul matricei sistemului este 2 și rangul matricei extinse este 3, de unde rezultă concluzia.

2. a) Se demonstrează că $f(1)=1$ și $f(2)=2$ și apoi că $f(5)=5$.

b) Folosind ipoteza, se deduce că $f(a_{n+1}) = (f(a_n))^2 + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și apoi, folosind această relație, se demonstrează prin inducție concluzia.

c) Se consideră $g \in \mathbb{R}[X]$, $g = f - X$. Din b) avem că $g(a_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, deci g este polinomul nul, așadar $f = X$.