

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) Se considera funcția $g(x) = x - (x+1) \cdot \ln(x+1)$

Calculeaza $g'(x) = 1 - \ln(x+1) - 1 = -\ln(x+1)$ Se arata ca g este strict descrescatoare pe $(0; \infty)$, $g_d(0) = 0 \Rightarrow g(x) < 0, \forall x > 0$.

b) Scrie $f(x) = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$ si calculeaza limita exponentului. Limita ceruta este egala cu 1.

c) $f'(x) = f(x) \cdot \frac{g'(x)}{x^2 \cdot (x+1)}$, unde g a fost definita mai sus. Cum $f'(x) < 0, \forall x > 0 \Rightarrow f$ strict descrescatoare.

2.a) Integrând prin părți se obține $f(2) = 1 - \frac{2}{e}$.

b) Avem: $f(1) = 1 - \frac{1}{e} \leq 1$. Daca $x > 1$, atunci $f(x) = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt \leq \int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x}$.

c) $f(x+1) = \int_0^1 (-e^{-t})' \cdot t^x dt = -e^{-t} \cdot t^x \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-t} \cdot x \cdot t^{x-1} dt = -\frac{1}{e} + x \cdot f(x), x > 1$.