

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) $x = 0$ este asimptota verticală. Funcția f nu admite alte asimptote

b) Aplica T.Lagrange funcției f pe $[k, k+1]$ și stabilește inegalitățile cerute.

c) Sumează inegalitățile de la a) și obține $x_n > \ln(n+1) - \ln n > 0, n \in \mathbb{N}^*$.

$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n$ și folosind a) se deduce că șirul este descrescător.

2.a) Convine $F'(x) = f(x), \forall x > -1$,

$$\text{adică } \frac{a}{x+1} + \frac{2bx}{x^2+1} + \frac{c}{x^2+1} = \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}, \forall x > -1$$

sau $a + 2b = 0, 2b + c = 2, a + c = 0$, de unde $a = -1, b = \frac{1}{2}, c = 1$.

$$\text{b) Avem: } \int_0^1 f(x) dx = F(x) \Big|_0^1 = \left(-\ln(x+1) + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \arctg(x) \right) \Big|_0^1 = =$$
$$-\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4}.$$

c) Avem că $F'(x) = f(x), x > -1$ Stabilește că $F'(x) < 0, x \in (-1; 0), F'(x) > 0, x > 0$ și deduce monotonia.