

Soluție

1. a) Se arată că $\det(A) = 0 \Leftrightarrow m \in \{1, 2\}$.

b) Dacă $m \notin \{1, 2\}$, sistemul este de tip Cramer, deci este compatibil

Se arată că dacă $m \in \{1, 2\}$, atunci sistemul este compatibil 1-nedeterminat.

c) Pentru $m \neq 1$, sistemul are soluția
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases}.$$

Dacă $m = 1$, $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A}) = 2$, și sistemul are soluții de forma
$$\begin{cases} x = a \\ y = 1 - a, \text{ cu } a \in \mathbb{R} \\ z = -1 \end{cases}.$$

2. a) Dacă $x = y = \hat{0}$, atunci $x^2 + y^2 = \hat{0}$.

$\forall x \in \mathbb{Z}_3$, $x^2 \in \{\hat{0}, \hat{1}\}$ și dacă $x \neq \hat{0}$ sau $y \neq \hat{0}$, se arată că $x^2 + y^2 \in \{\hat{1}, \hat{2}\}$.

b) Dacă $X = A(a, b) \in H$ și $Y = A(c, d) \in H$, $X \cdot Y = A(ac + \hat{2}bd, bc + ad) \in H$

Dacă $X = A(a, b) \in H$, atunci $d = a^2 + b^2 \in \{\hat{1}, \hat{2}\}$ și $X^{-1} = A(ad^{-1}, \hat{2}bd^{-1}) \in H$

c) $X^2 = I_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + \hat{2}b^2 = \hat{1} \\ ab = \hat{0} \end{cases}.$

Pentru $a = \hat{0}$ ecuația $\hat{2}b^2 = \hat{1}$ nu are soluții.

Pentru $b = \hat{0}$ rezultă $a \in \{\hat{1}, \hat{2}\}$ și soluțiile $X_1 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ și $X_2 = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}.$