

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) $y=0$ asimptota orizontală la ∞ și la $-\infty$.

Dreptele $x=0, x=-1$ sunt asimptote verticale.

b) Avem ca $f'(x) = \frac{-2(3x^2 + 3x + 1)}{x^3 \cdot (x+1)^3} < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$, de unde se obține concluzia.

c) $\sum_{k=1}^n f(k) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$ Limita cerută este $\frac{1}{e}$

2.a) $I_1 = \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx = 2 - \ln 3.$

b) Avem ca $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} + \int_1^2 \frac{x^n}{1+x^n} dx \leq \int_0^1 x^n dx + \int_1^2 1 dx = \frac{1}{n+1} + 1.$

c) Avem ca $0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx \leq \int_0^1 x^n dx \Rightarrow 0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx \leq \frac{1}{n+1}$, deci $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$, are limita

egală cu 0. Cum $I_n = J_n + \int_1^2 \frac{x^n}{1+x^n} dx = J_n + \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{1+x^n} \right) dx = J_n + 1 - c_n$, și c_n are limita egală cu 0, deducem că limita cerută este egală cu 1.