

Soluție:

1.a) $a = 2, b = 0$

1.b) $a = 4, b \neq -2$

1.c) $a \neq 4; b = -a + 2 \Rightarrow x, y, z \in \mathbb{Z}$. Pentru $a = 4, b = -2$.

1.c) În egalitatea $X^2 = 0_3$ trecând la determinant se obține $a = \hat{0}$. Cum $X = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ b & c & \hat{0} \end{pmatrix}, b, c \in \mathbb{Z}_2$ verifică

egalitatea $X^2 = 0_3$, rezultă că avem 4 soluții.

2.a) Cum $a, b, c \in \mathbb{Z}_2$ și variază independent, rezultă că A are 8 elemente

2b) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$. Dacă $a = \hat{0} \Rightarrow X^2 = 0_3$. Dacă $a = \hat{1} \Rightarrow X^2 = I_3$.

2.c) $a = \hat{0}, b, c \in \mathbb{Z}_2 \Rightarrow 4$ soluții.

Dacă $b \neq 0$ atunci $c = \frac{1-a^2}{b} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*$

Dacă $b = 0$, atunci $c \in \mathbb{R}, a^2 = 1, a \in \{-1, 1\}$ și obținem $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}$ sau $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R}$.