

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție:

1. a) $\text{rang}(A_0) = 1$.

b) Calcul direct.

c) Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,

$$C_n^{\text{not}} = A^n B - B A^n = A^{n-1} (A B - B A) + (A^{n-1} B - B A^{n-1}) A \stackrel{\text{ip}}{=} A^{n-1} \cdot A + C_{n-1} \cdot A.$$

Folosind relația anterioară, se demonstrează prin inducție concluzia.

2. a) Avem $f(-1) = f(1) = 0$ și obținem $a = -4$ și $b = 12$.

b) Deoarece ecuația are coeficienți reali, dacă admite rădăcina $x_1 = i$, va avea și rădăcina $\overline{x_1} = -i$, deci polinomul f se va divide cu $(X - i)(X + i) = X^2 + 1$, adică $a = 4$ și $b = -12$.

c) Rădăcinile x_1, x_2, x_3 sunt în progresie aritmetică, deci există $z, r \in \mathbb{C}$ astfel încât $x_1 = z - r$, $x_2 = z$ și $x_3 = z + r$. Obținem $x_1 + x_2 + x_3 = 3z = 3$, deci $z = 1$.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (1 - r)^2 + 1 + (1 + r)^2 = 11, \text{ deci } r \in \{-2, 2\}, \text{ iar rădăcinile sunt } -1, 1, 3.$$

În final, $a = 4 \cdot (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) = -4$ și $b = -4 x_1 x_2 x_3 = 12$.