

Rezolvare

1) a)  $f'(x) = \ln x + 1$ .

Pe intervalul  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ,  $f$  este strict descrescătoare, iar intervalul  $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ ,  $f$  este strict crescătoare.

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ ,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$ . Deci  $f$  nu are asimptote.

c) Se arată că șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este mărginit și monoton ( $x_{n+1} < x_n$ ).

2) a)  $I_2 = \int_0^1 \frac{x^2}{4x+5} dx = \frac{1}{8} - \frac{5}{16} + \frac{25}{64} \cdot \ln \frac{9}{5}$ .

b)  $4I_{n+1} + 5I_n = \int_0^1 \frac{x^n (4x+5)}{4x+5} dx = \frac{1}{n+1}$ .

c)  $I_{n+1} - I_n \leq 0 \rightarrow \frac{1}{9(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{9n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n I_n = \frac{1}{9}$ .