

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. TÉTEL (30p) – 017. változat

1. Adott az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat úgy, hogy $x_1 \in (0,1)$ és $x_{n+1} = \frac{x_n^5 + 3x_n}{4}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Igazold, hogy $x_n \in (0,1), \forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

5p b) Igazold, hogy az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat konvergens.

5p c) Igazold, hogy: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+2}}{x_n} = \frac{9}{16}$.

2. Adottak az $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}, n \in \mathbb{N}^*$ függvények.

5p a) Számítsd ki az f_1 függvény grafikus képe, a koordinátatengelyek, valamint az $x=1$ egyenletű egyenes által határolt síkidom területét.

5p b) Számítsd ki $\int_0^1 x \cdot (f_1(x))^2 dx$ értékét.

5p c) Igazold, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot (f_n(1) + f_n(2) + f_n(3) + \dots + f_n(n)) = \frac{\pi}{4}$.