

III. FELADAT (30p) – 039. változat

1. Adott az $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \ln x$ függvény

- 5p** **a)** Tanulmányozd a függvény monotonitását.
5p **b)** Határozd meg a függvény grafikus képének szimptotáit.
5p **c)** Ha $x_0 \in (0, 1)$ és $x_{n+1} = e^{f(x_n)}, \forall n \in \mathbb{N}$ igazold, hogy az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat konvergens.

2. Adott az $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat úgy, hogy $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4x+5} dx, \forall n \in \mathbb{N}^* .$

- 5p** **a)** Számítsd ki az I_2 értékét.
5p **b)** Igazold, hogy az $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén teljesíti a $4I_{n+1} + 5I_n = \frac{1}{n+1}$ egyenlőséget.
5p **c)** Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$ határértéket.