

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008

II. FELADAT (30p) – 005. változat

1. Adottak az $A(0, 6)$, $B(1, 4)$, $C(-1, 8)$ pontok és az $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 6 & 4 & 8 & b \end{pmatrix}$ mátrix, $a, b \in \mathbb{R}$.

5p a) Igazold, hogy az A, B, C pontok kollineárisak.

5p b) Határozd meg az M mátrix rangját, ha $a = 3$ és $b = 0$.

5p c) Ha zéróval egyenlő az egyik olyan harmadrendű aldetermináns az M mátrix harmadrendű aldeterminánsai közül, amelyek tartalmazzák a mátrix utolsó oszlopát, igazold, hogy $\text{rang}(M) = 2$.

2. Ismertnek tekintjük, hogy a (G, \circ) struktúra csoport, ahol $G = (3, \infty)$ és $x \circ y = (x - 3)(y - 3) + 3$, $\forall x, y \in G$. Adott az $f : (0, \infty) \rightarrow G$, $f(x) = x + 3$ függvény.

5p a) Számítsd ki a $4 \circ 5 \circ 6$ értéket!

5p b) Igazold, hogy f csoportizomorfizmus a $((0, \infty), \cdot)$ és (G, \circ) csoportok között!

5p c) Ha H egy olyan részcsoportja G -nek, amely tartalmazza az összes $k \geq 4$ természetes számot, igazold, hogy H tartalmazza az összes $q > 3$ racionális számot!