

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008**

**II. FELADAT (30p) – 007. változat**

1. Adottak az  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  és a  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  mátrixok valamint az

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 3 \\ y + 2z + 3t = 2 \\ z + 2t = 1 \end{cases} \text{ egyenletrendszer.}$$

5p a) Határozd meg az  $A$  mátrix rangját!

5p b) Határozd meg az egyenletrendszer megoldáshalmazát!

5p c) Igazold, hogy az  $XA = B$  egyenletnek nincs  $X \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{C})$  megoldása!

2. Tetszőleges  $t, n \in \mathbb{Z}$  számok esetén tekintsük az  $A(n) = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n \end{pmatrix}$  mátrixot valamint a

$G = \{ A(k) \mid k \in \mathbb{Z} \}$ ,  $H_t = \{ A(k \cdot t - 1) \mid k \in \mathbb{Z} \}$  halmazokat. Ismertnek tekintjük, hogy a  $(G, \cdot)$  struktúra csoport, ahol a „ $\cdot$ ” művelet a mátrixok szorzása.

5p a) Igazold, hogy  $\forall n, p \in \mathbb{Z}$  esetén  $A(n) \cdot A(p) = A(n + p + 1)$ .

5p b) Igazold, hogy bármely  $t \in \mathbb{Z}$  esetén,  $H_t$  részcsoportja a  $(G, \cdot)$  csoportnak!

5p c) Igazold, hogy a  $(G, \cdot)$  és  $(\mathbb{Z}, +)$  izomorf csoportok!