

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008

II. FELADAT (30p) – 009. változat

1. Adottak az $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixok és $n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Számítsd ki az A^4 mátrixot!

5p b) Ha a $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrix teljesíti a $B \cdot E_1 = E_1 \cdot B$ és $B \cdot E_2 = E_2 \cdot B$ egyenlőségeket, igazold, hogy létezik olyan $a \in \mathbb{R}$, amelyre $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

5p c) Ha bármely $X \in M_2(\mathbb{R})$ mátrix esetén $A^n \cdot X = X \cdot A^n$, igazold, hogy létezik $k \in \mathbb{N}^*$ úgy, hogy $n = 4k$.

2. Az $f = 2X^4 + aX^3 + 3X^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$ polinom gyökei $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

5p a) Határozd meg az f polinom gyökeit, ha $a = b = 0$, $c = -5$.

5p b) Igazold, hogy

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_1 - x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 + (x_3 - x_4)^2 = \frac{3}{4}(a^2 - 16).$$

5p c) Ha $a = 4$, határozd meg $b, c \in \mathbb{R}$ értékét úgy, hogy a polinom minden gyöke valós legyen!