

Ministerul Educatiei, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p) – 076. változat

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$ függvény.

5p a) Mutasd ki, hogy az f függvény grafikus képe van vízszintes aszimptotája $+\infty$ -ben

5p b) Tanulmányozd az f függvény monotonitását.

5p c) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(1) + f(2) + \dots + f(n)}{n} \right)^n$ határértéket.

2. Legyen $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$, ahol $n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Számítsd ki I_1 -et.

5p b) Igazold, hogy $(n+2)I_n = (n-1)I_{n-2}$, bármely $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ esetén.

5p c) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ határértéket.