

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p) – 062. változat

1. Bármely n , nullától különböző természetes szám esetén értelmezzük az $f_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f_n(x) = x^n + \ln x$ függvényt.

5p a) Igazold, hogy az f_2 függvény szigorúan növekvő a $(0, \infty)$ intervallumon

5p b) Igazold, hogy az $f_n(x) = 0$ egyenletnek egyetlen valós megoldása van a $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ intervallumban.

5p c) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{f_2(x) - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$ határértéket.

2. Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \in (-\infty, 0] \\ 1 + \sin x, & x \in (0, \infty) \end{cases}$ függvény.

5p a) Igazold, hogy az f függvény integrálható a $[-2\pi, 2\pi]$ intervallumon..

5p b) Számítsd ki $\int_{-1}^{\pi} f(x) dx$ értékét.

5p c) Igazold, hogy bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, $\int_0^{2\pi} f^n(x) dx \leq 2^n \pi$.