

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008

II. FELADAT (30p) – 038. változat

1. Adott az $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix és az $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$ mátrixhalmaz.

5p a) Számítsd ki az A^3 mátrixot!

5p b) Ha $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ és $AX = XA$, igazold, hogy $X \in M$.

5p c) Igazold, hogy az $X^2 = A$ egyenletnek nincs megoldása az $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ halmazban!

2. Adott az $f = aX^4 + bX + c$ polinom, $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

5p a) Igazold, hogy az $f(3) - f(1)$ szám páros!

5p b) Igazold, hogy bármely $x, y \in \mathbb{Z}$ esetén az $f(x) - f(y)$ szám osztható az $x - y$ számmal!

5p c) Ha $a \neq 0$, $f(1) = 4$ és $f(4) = 1$, igazold, hogy $|f(2)| \geq 67$.