

III. FELADAT (30p) – 029. változat

1. Adottak az $f_n, g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^{2n-1} + x^{2n}, g_n(x) = x^{2n+1} + 1$ függvények, ahol $n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Igazold, hogy $f'_n(x) = \frac{g'_n(x)}{x+1} - \frac{g_n(x)}{(x+1)^2}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ esetén.

5p b) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n\left(\frac{1}{2}\right)$ határértéket.

5p c) Igazold, hogy az f_n függvénynek pontosan egy helyi szélsőérték pontja van.

2. Adott az $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat, ahol $I_n = \int_0^2 (2x - x^2)^n dx, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Számítsd ki I_2 értékét.

5p b) Igazold, hogy: $(2n+1)I_n = 2nI_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$.

5p c) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ határértéket.