

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008

II. FELADAT (30p) – 055. változat

1. Az $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrix és az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatok teljesítik az

$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ egyenlőséget $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén.

5p a) Igazold, hogy $x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = (a^2 + b^2)(x_n^2 + y_n^2), \forall n \in \mathbb{N}$ esetén!

5p b) Ha $a^2 + b^2 \leq 1$, igazold, hogy az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatok korlátosak!

5p c) Ha $a = 1$ és $b = \sqrt{3}$, igazold, hogy $x_{n+6} = 64x_n, \forall n \geq 0$ esetén!

2. Adott az $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ mátrix.

5p a) Legyen $n \in \mathbb{N}^*$. Igazold, hogy $A^n = I_3$ akkor és csakis akkor, ha az n szám osztható négygyel!

5p b) Legyen $G = \{A^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. Igazold, hogy a G halmaz a mátrixok szorzásával egy négyelemű kommutatív csoportot alkot!

5p c) Számítsd ki $\det(I_3 + A + A^2 + \dots + A^{2008})$ értékét!