

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008

II. FELADAT (30p) – 023. változat

1. Adott az $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix és a $C(A) = \left\{ X = \begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\}$ halmaz.

5p a) Igazold, hogy $\forall X \in C(A)$ esetén teljesül az $XA = AX$ egyenlőség!

5p b) Ha $Y \in C(A)$ és $Y^2 = O_2$, igazold, hogy $Y = O_2$.

5p c) Ha $Z \in C(A)$, $Z \neq O_2$ és a Z mátrix minden eleme racionális szám, igazold, hogy $\det(Z) \neq 0$.

2. Adott az $a \in \mathbb{Z}_3$ és az $f = X^3 + \hat{2}X^2 + a \in \mathbb{Z}_3[X]$ polinom.

5p a) Számítsd ki az $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2})$ összeget!

5p b) $a = \hat{2}$ esetén határozd meg az f polinom \mathbb{Z}_3 halmazbeli gyökeit!

5p c) Határozd meg azon $a \in \mathbb{Z}_3$ értéket, amelyre az f polinom irreducibilis $\mathbb{Z}_3[X]$ -ben!