

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008

II. FELADAT (30p) – 041. változat

1. A $p, q, r \in \mathbb{C}$ számok esetén adott az
$$\begin{cases} x + py + p^2 z = p^3 \\ x + qy + q^2 z = q^3 \\ x + ry + r^2 z = r^3 \end{cases}$$
 egyenletrendszer.

5p a) Igazold, hogy a rendszer determinánsának értéke $\Delta = (p - q)(q - r)(r - p)$.

5p b) Ha a p, q, r számok páronként különbözőek, oldd meg a rendszert!

5p c) Ha a $(-1, 1, 1)$ számhármás megoldása a rendszernek, igazold, hogy a p, q, r számok közül legalább kettő egyenlő!

2. Adott az $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix és a $G = \{A^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ halmaz.

5p a) Számítsd ki az A^4 mátrixot!

5p b) Igazold, hogy a (G, \cdot) struktúra kommutatív csoport, ahol a „ \cdot ” művelet a mátrixok szorzása!

5p c) Oldd meg az $X^3 = I_4, X \in G$ egyenletet!