

III. FELADAT (30p) – 035. változat

1. Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln(e^x + 1)$ függvény.

5p a) Igazold, hogy az f' függvény szigorúan csökkenő \mathbb{R} -en.

5p b) Igazold, hogy $\lim_{x \rightarrow \infty} x^a f(x) = 0, \forall a \in \mathbb{R}$.

5p c) Határozd meg az f függvény grafikus képének aszimptotáit.

2. Adott az $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat, úgy, hogy $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^3} dx, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Számítsd ki I_2 értékét.

5p b) Igazold, hogy az $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat szigorúan csökkenő.

5p c) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ határértéket.