

**Ministerul Educatiei, Cercetării și Tineretului**  
**Centrul National pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**III. FELADAT (30p) – 008. változat**

1. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + \cos x$  függvény és az  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $x_0 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $x_{n+1} = f(x_n)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  sorozat.

**5p** a) Igazold, hogy az  $f$  függvény szigorúan növekvő az  $\mathbb{R}$  - en.

**5p** b) Igazold, hogy  $x_n \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

**5p** c) Számítsd ki a  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  határértéket.

2. Adott az  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sorozat úgy, hogy  $I_0 = \frac{\pi}{2}$  és  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**5p** a) Számítsd ki  $I_1$  értékét.

**5p** b) Igazold, hogy az  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sorozat csökkenő.

**5p** c) Igazold, hogy  $nI_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  esetén.