

Ministerul Educatiei, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p) – 015. változat

1. Értelmezzük minden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ esetén az $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n - nx + 1$ függvényeket.

5p **a)** Igazold, hogy az f_n szigorúan csökkenő a $(0;1]$ intervallumon és szigorúan növekvő az $[1;\infty)$ intervallumon.

5p **b)** Igazold, hogy az $f_n(x) = 0$, egyenletnek két: $a_n \in (0;1)$ és $b_n \in (1;\infty)$ megoldása van ha $x > 0$.

5p **c)** Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ határértéket, ahol a_n a **b)** alpontból értelmezett.

2. Adott az $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat, ahol $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx$ és $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 1} dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Igazold, hogy: $I_0 = \frac{\pi}{4}$.

5p **b)** Igazold, hogy: $I_{2n} = \frac{1}{2n-1} - I_{2n-2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ esetén.

5p **c)** Igazold, hogy: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2n-1} \right) = I_0$.