

Ministerul Educatiei, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p) – 005. változat

1. Adott az $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$ függvény.

5p a) Számítsd ki a függvény deriváltját.

5p b) Határozd meg a függvény grafikus képének azon pontjait, amelyekben a grafikus képhez húzott érintő párhuzamos a $9y = 2x$ egyenletű egyenessel.

5p c) Igazold, hogy: ha $x \geq 0$, akkor $\ln x \geq \frac{2(x-1)}{x+1}$.

2. Értelmezzük az $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2}$ függvényt és az $(a_n)_{n \geq 1}$ sorozatot, ahol

$$a_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n). \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

5p a) Igazold, hogy: $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k), \forall k \in (0, \infty)$.

5p b) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx$ határértéket, ahol $n \in \mathbb{N}$.

5p c) Igazold, hogy az $(a_n)_{n \geq 1}$ sorozat konvergens.