

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008**

**II. FELADAT (30p) – 071. változat**

1. Adott az  $n$ -ed rendű,  $n \geq 2$ ,  $D_n =$  
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}$$
 determináns.

5p a) Számítsd ki  $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$  értékét!

5p b) Igazold, hogy  $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$ ,  $\forall n \geq 4$  esetén!

5p c) Igazold, hogy  $D_n = n + 1$ ,  $\forall n \geq 2$  esetén!

2. Egy  $(G, \cdot)$  multiplikatív csoport, amelynek semleges eleme  $e$ , rendelkezhet a következő  $(p)$  tulajdonsággal:  $(p)$  "bármely  $x \in G$  esetén  $x^2 = e$ ".

5p a) Igazold, hogy a  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  halmaz az  $(a, b) \cdot (c, d) = (a + c, b + d)$ ,  $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2$  művelettel egy olyan csoportot alkot, amely rendelkezik a  $(p)$  tulajdonsággal!

5p b) Ha egy  $G$  csoport rendelkezik a  $(p)$  tulajdonsággal, igazold, hogy  $(xy)^2 = x^2 y^2$ ,  $\forall x, y \in G$  esetén!

5p c) Igazold, hogy minden  $(p)$  tulajdonságú csoport kommutatív!