

**Ministerul Educatiei, Cercetării și Tineretului**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**III. FELADAT (30p) – 082. változat**

1. Adott az  $(a_n)_{n \geq 0}$ ,  $a_0 = \sqrt{3}$ ,  $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  sorozat.

5p a) Igazold, hogy az  $(a_n)_{n \geq 0}$  sorozat szigorúan növekvő.

5p b) Igazold, hogy az  $(a_n)_{n \geq 0}$  sorozat konvergens.

5p c) Számítsd ki a  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( 1 - \cos \frac{\pi}{n} \right)$  határértéket.

2. Adott az  $f : \left( 0, \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow (0, \infty)$ ,  $f(x) = \int_0^x \frac{(\sin t + \cos t) \sin t}{\cos^2 t} dt$  függvény.

5p a) Számítsd ki  $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$  értékét.

5p b) Igazold, hogy az  $f$  függvény szigorúan növekvő a  $\left( 0, \frac{\pi}{2} \right)$  intervallumon.

5p c) Számítsd ki a  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{x^2}$  határértéket.