

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p) – 067. változat

1. Legyen $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, melyről tudjuk, hogy kétszeresen deriválható, $f(0) = 0$ és $f'(0) = 1$.

5p **a)** Igazold, hogy az $f(x) = e^x \sin x, \forall x \in [-1, 1]$ függvény teljesíti a fenti feltételeket.

5p **b)** Igazold, hogy: $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + f(x))^{\frac{1}{x}} = e^{f'(0)}$.

5p **c)** Ha $n \in \mathbb{N}^*$ igazold, hogy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^n(x) - x^n}{x^{n+1}} = \frac{nf''(0)}{2}$.

2. Adottak az $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1+x}$ és $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \int_0^x f(t) dt$ függvények.

5p **a)** Igazold, hogy: $g(x) = \ln(1+x)$.

5p **b)** Számítsd ki: $\int_0^1 f^2(x) g(x) dx$.

5p **c)** Bizonyítsd be, hogy $f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \leq n \ln 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén.