

III. FELADAT (30p) – 032. változat

1. Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \arctg(x+2) - \arctg x$ függvény.

5p **a)** Számítsd ki: $f'(x), x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Igazold, hogy $0 < f(x) \leq \frac{\pi}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$.

5p **c)** Igazold, hogy a $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x) + \arctg \frac{(x+1)^2}{2}$ függvény egy állandó függvény.

2. Adottak az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3}{3} - x + \arctg x$ és $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \arctg x$ függvények.

5p **a)** Számítsd ki: $\int_1^2 \frac{f'(x)}{x} dx$.

5p **b)** Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} \int_0^x f(t) dt$ határértéket.

5p **c)** Számítsd ki annak a síkidomnak a területét, amelyet a két függvény grafikus képe, valamint az $x=0$ és $x=1$ egyenletű egyenesek határolnak.