

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008

II. FELADAT (30p) – 036. változat

1. Adottak az $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és az $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrixok, amelyekre $A^2 = O_2$.

5p a) Igazold, hogy $a + d = 0$.

5p b) Igazold, hogy az $I_2 + A$ mátrix invertálható!

5p c) Igazold, hogy az $AX = O_2$ egyenletnek végtelen sok megoldása van az $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ halmazban!

2. Adott az $f = X^4 - 2X^2 + 9$ polinom, amelynek gyökei $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$, az $a = \sqrt{2} + i$ szám, valamint az $A = \{g(a) \mid g \in \mathbb{Q}[X]\}$ és $B = \{h(a) \mid h \in \mathbb{Q}[X], \text{grad}(h) \leq 3\}$ halmazok.

5p a) Számítsd ki az $f(a)$ értéket!

5p b) Számítsd ki a $|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4|$ összeget!

5p c) Igazold, hogy $A = B$.