

**Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**III. FELADAT (30p) – 080. változat**

1. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  függvény.

5p a) Tanulmányozd az  $f$  függvény monotonitását.

5p b) Igazold, hogy  $(x^2 + 1)f''(x) + xf'(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  bármely  $x \in \mathbb{R}$  esetén.

5p c) Igazold, hogy az  $f$  grafikus képének van aszimptotája  $-\infty$ -ben.

2. Legyen  $I_n = \int_0^1 \frac{nx^n}{x^n + 1} dx, \forall n \in \mathbb{N}^*$  esetén.

5p a) Számítsd ki  $I_1$  értékét.

5p b) Igazold, hogy  $I_n = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1 + x^n) dx, \forall n \in \mathbb{N}^*$  esetén.

5p c) Számítsd ki a  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$  határértéket.