

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008

II. FELADAT (30p) – 100. változat

1. Adott az $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$ mátrix.

5p a) Igazold, hogy $(I_2 + A)^2 = I_2 + A$.

5p b) Igazold, hogy az $\{A^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ véges halmaz!

5p c) Számítsd ki $\det(2008I_2 - A + A^2 - A^3 + \dots + A^{2008})$ értékét!

2. Legyen $n \in \mathbb{N}, n \geq 3, a \in \mathbb{Z}, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ és az $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ polinom.

5p a) Igazold, hogy $f(1) + f(-1)$ páros szám!

5p b) Igazold, hogy ha $f(2)$ és $f(3)$ páratlan számok, akkor az f polinomnak nincsenek egész gyökei!

5p c) Igazold, hogy a $g = X^3 - X + 3a + 1$ polinom nem bontható fel két egész együtthatós, nem állandó polinom szorzatára!