

III. FELADAT (30p) – 036. változat

1. Adott az $f: \mathbb{R} \setminus \{\sqrt{3}\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-x}$ függvény és az $(a_n)_{n \geq 1}$ sorozat úgy, hogy

$$a_1 = 2 \text{ és } a_{n+1} = f(a_n), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

5p a) Igazold, hogy az f függvény szigorúan növekvő a $(-\infty, \sqrt{3})$ és $(\sqrt{3}, \infty)$ intervallumokon.

5p b) Határozd meg az f függvény grafikus képének aszimptotáit.

5p c) Igazold, hogy az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat periodikus.

2. Adottak az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{-x^2}$ és $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x f(t)dt$ függvények.

5p a) Határozd meg a F függvény grafikus képének inflexiós pontjait.

5p b) Számítsd ki: $\int_0^1 xf(x)dx$.

5p c) Számítsd ki: $\int_0^1 F(x)dx$.