

Ministerul Educatiei, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p) – 097. változat

1. Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \arctg x$ függvény.

5p a) Igazold, hogy az f függvény konkáv a $[0, \infty)$ intervallumon.

5p b) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (f(x+1) - f(x))$ határértéket.

5p c) Oldd meg a valós számok halmazán az $f(x) < x - \frac{x^3}{3}$ egyenlőtlenséget.

2. Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$ függvény.

5p a) Számítsd ki $\int_0^1 x(1+x^2)f(x)dx$ értékét.

5p b) Igazold, hogy az $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x t^4 f(t)dt$ függvény szigorúan növekvő.

5p c) Igazold, hogy bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén $\int_1^a f(x)dx < \frac{1}{4}$.