

III. FELADAT (30p) – 048. változat

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ függvény.

- 5p a) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ határértéket.
- 5p b) Határozd meg az f függvény deriválhatósági tartományát.
- 5p c) Igazold, hogy az f függvénynek két szélsőérték pontja van.

2. Adott az $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ függvény és az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$,

$$a_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{n^2 - k^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ sorozat.}$$

- 5p a) Számítsd ki: $\int_0^1 x f(x) dx$.
- 5p b) Számítsd ki az f függvény grafikus képeznek Ox tengely körüli forgatásával származtatott forgástest térfogatát.
- 5p c) Igazold, hogy az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat konvergens.