

**Ministerul Educatiei, Cercetării și Tineretului**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**III. FELADAT (30p) – 075. változat**

1. Adott az  $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (1+x)^\alpha - \alpha x$  függvény, ahol  $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 1$ .

5p a) Tanulmányozd az  $f$  függvény monotonitását.

5p b) Igazold, hogy  $(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x, \forall x \in (-1, \infty) \setminus \{0\}, \forall \alpha \in (1, \infty)$ .

5p c) Igazold, hogy  $2f(x+y) \leq f(2x) + f(2y), \forall x, y \in [0, \infty)$ .

2. Adott az  $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{1+x}$  függvény.

5p a) Számítsd ki:  $\int_0^1 f(x) dx$ .

5p b) Számítsd ki:  $\int_1^4 f^2(x)[x] dx$ , ahol  $[x]$  az  $x$  valós szám egészrészét jelöli.

5p c) Igazold, hogy  $(a_n)_{n \geq 1}$ ,  $a_n = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) - \int_0^n f(x) dx$  sorozat konvergens.