

**Ministerul Educatiei, Cercetării și Tineretului**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**III. FELADAT (30p) – 094. változat**

1. Adottak az  $f_n : [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = x^{n+1} - (n+2)x + n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  függvények.

5p a) Igazold, hogy az  $f_n$  függvények grafikus képének nincs aszimptotája  $+\infty$ -ben.

5p b) Igazold, hogy  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , esetén az  $f'_n(x) = 0$  egyenletnek egyetlen megoldása van a  $[0, \infty)$  intervallumban.

5p c) Számítsd ki a  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  határértéket, ahol  $x_n$  az  $f'_n(x) = 0$  egyenlet egyetlen megoldását jelöli.

2. Legyen  $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  esetén.

5p a) Számítsd ki  $I_1$  értékét.

5p b) Igazold, hogy  $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{2n+1}$ ,  $\forall n \geq 1$  esetén.

5p c) Számítsd ki a  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$  határértéket.