

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p) – 068. változat

1. Adott az $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln \frac{2x+1}{2x+3}$ függvény.

5p a) Számítsd ki: $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.

5p b) Mutasd ki, hogy $f(x) < 0$, $\forall x \in (0, \infty)$.

5p c) Igazold, hogy az $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln\left(n + \frac{1}{2}\right)$ sorozat szigorúan csökkenő.

2. Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$ függvény.

5p a) Igazold, hogy az f függvény páratlan.

5p b) Igazold, hogy $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

5p c) Igazold, hogy: $\int_0^1 f(x) dx \leq e - 2$.