

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008

II. FELADAT (30p) – 058. változat

1. Legyen $a, b, c, d > 0$, az $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrix és az $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ függvény.

Legyen $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, ahol $n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Ha $\det A = 0$, igazold, hogy az f állandó függvény!

5p b) Ha $\det A \neq 0$, igazold, hogy f függvény injektív!

5p c) Igazold, hogy $\underbrace{(f \circ f \circ f \circ \dots \circ f)}_{n\text{-darab } f}(x) = \frac{a_n x + b_n}{c_n x + d_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

2. Adottak az $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixok és a $G = \{I_2 + aA + bB \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq -1\}$ halmaz.

5p a) Igazold, hogy a G halmaz minden mátrixa invertálható!

5p b) Igazold, hogy G az $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ halmaz invertálható mátrixaiból alkotott multiplikatív csoport részcsoportja!

5p c) Igazold, hogy az $X^2 = I_2$ egyenletnek végtelen sok megoldása van a G halmazban!