

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008

II. FELADAT (30p) – 088. változat

1. Adott $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrix esetén legyen A^t a mátrix transzponáltja, és $\text{Tr}(A)$ a főátló elemeinek összege.

5p a) Igazold, hogy $\text{Tr}(A + A^t) = 2\text{Tr}(A)$.

5p b) Ha $\text{Tr}(A \cdot A^t) = 0$, igazold, hogy $A = O_2$.

5p c) Ha az $A \cdot A^t$ mátrix elemeinek összege zéró, igazold, hogy $\det(A) = 0$.

2. Adottak az $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ mátrixok és a $K = \{aI_2 + bA \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ halmaz.

5p a) Igazold, hogy $A^2 \in K$.

5p b) Igazold, hogy a K zárt részhalmaz az $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ halmazbeli mátrixok szorzására nézve!

5p c) Igazold, hogy bármely $X \in K$, $X \neq O_2$ mátrix esetén létezik $Y \in K$ mátrix úgy, hogy teljesüljön az $XY = I_2$ egyenlőség!