

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p) – 090. változat

1. Adottak az $f_n : (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^n + \ln x, n \in \mathbb{N}^*$ függvények.

5p a) Határozd meg az f_1 függvény grafikus képének aszimptotáit.

5p b) Bizonyítsd be, hogy bármely nullától különböző n természetes szám esetén a

$g_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g_n(x) = f_n(x) + f_n\left(\frac{1}{x}\right)$ konvex függvény.

5p c) Ha x_n az $f_n(x) = 2^n$ egyenlet egyetlen megoldása igazold, hogy az $(x_n)_{n \geq 1}$ sorozat konvergál 2-höz.

2. Legyen $a \in [0, 1]$ és $I_n = \int_0^a \frac{x^n}{x+1} dt, \forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

5p a) Számítsd ki: I_2 értékét.

5p b) Igazold, hogy $I_n + I_{n-1} = \frac{a^n}{n}, \forall n \geq 2$ esetén.

5p c) Igazold, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.