

Ministerul Educatiei, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p) – 073. változat

1. Adottak az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctg x$ és $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$ függvények.

5p a) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)g(x))$ határértéket.

5p b) Írd fel a $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = g(x) - f(x)$ függvény grafikus képéhez húzott érintő egyenletét az $(1, h(1))$ pontban.

5p c) Igazold, hogy $f(x) > g(x)$, $\forall x \in (0, \infty)$ esetén.

2. Adott $f_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_0(x) = 1$ függvény és bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén értelmezzük az $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t) dt$ függvényeket.

5p a) Igazold, hogy $f_1^2(x) = 2f_2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén.

5p b) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf_n(x) + 1}{f_{n+1}(x) + 2}$ határértéket.

5p c) Számítsd ki a $g: [0, \pi] \rightarrow [0, \pi]$ $g(x) = f_1(x) \sin x$ függvény grafikus képének Ox tengely körüli forgatásával származtatott test térfogatát.