

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008

II. FELADAT (30p) – 027. változat

1. Az $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ halmazban adottak az $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ és $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixok.

5p a) Határozd meg az $A + I_2$ mátrix rangját!

5p b) Ha $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ olyan mátrix, amelyre $AX = XA$, igazold, hogy létezik $x, y \in \mathbb{C}$ úgy, hogy

$$X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}.$$

5p c) Igazold, hogy az $Y^2 = A$ egyenletnek egyetlen megoldása sincs az $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ halmazban!

2. Az \mathbb{R} halmazon értelmezzük az $x * y = x + y + xy$ műveletet.

5p a) Igazold, hogy a „ $*$ ” művelet asszociatív!

5p b) Ha $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$, igazold, hogy $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ esetén!

5p c) Számítsd ki az $1 * \frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \dots * \frac{1}{2008}$ értéket!