

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008

II. FELADAT (30p) – 003. változat

1. Adottak az $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrixok.

5p a) Számítsd ki $\det(A^2 + B^2)$ értékét!

5p b) Igazold, hogy $\forall X, Y \in M_2(\mathbb{C})$ esetén $\det(X \cdot Y) = \det(X) \cdot \det(Y)$.

5p c) Ha $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$ és $X \cdot Y = Y \cdot X$, igazold, hogy $\det(X^2 + Y^2) \geq 0$.

2. Ismertnek tekintjük, hogy a $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ struktúra kommutatív gyűrű, ahol
$$x * y = x + y - 3 \quad \text{és} \quad x \circ y = x \cdot y - 3x - 3y + 12, \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}.$$

5p a) Igazold, hogy a „ \circ ” művelet semleges eleme 4.

5p b) Határozd meg az $a, b \in \mathbb{Z}$ számokat úgy, hogy az $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = a \cdot x + b$ függvény a $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ és $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ gyűrűk közötti izomorfizmus legyen!

5p c) Oldd meg a \mathbb{Z} halmazon az $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{2008 \text{ darab } x} = 2^{2008} + 3$ egyenletet!