

**Ministerul Educatiei, Cercetării și Tineretului**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**III. FELADAT (30p) – 007. változat**

1. Adott az  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln x$  függvény és az  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , sorozat úgy, hogy

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

5p a) Határozd meg az  $f$  függvény grafikus képének aszimptotáit.

5p b) Igazold, hogy bármely  $k > 0$  esetén  $\frac{1}{k+1} < f(k+1) - f(k) < \frac{1}{k}$ .

5p c) Igazold, hogy az  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sorozat csökkenő és minden tagja pozitív.

2. Adottak az  $F : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = a \ln(x+1) + b \ln(x^2+1) + c \arctg x$  és az  $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)} \text{ függvények.}$$

5p a) Határozd meg az  $a, b, c \in \mathbb{R}$  értékeket úgy, hogy a  $F$  függvény az  $f$  egy primitív függvénye legyen.

5p b) Számítsd ki  $\int_0^1 f(x) dx$  értékét

5p c) Ha  $F$  a  $f$  primitív függvénye tanulmányozd az  $F$  függvény monotonitását.