

Ministerul Educatiei, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p) – 009. változat

1. Bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén értelmezzük az $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x - \sin x - n$ függvényt.

5p a) Igazold, hogy az f_n függvény szigorúan növekvő.

5p b) Jelölje x_n az $f_n(x) = 0$ egyenlet egyetlen valós megoldását. Igazold, hogy az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat nem korlátos.

5p c) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$ határértéket, ahol $(x_n)_{n \geq 1}$ a b) alpontban értelmezett sorozat.

2. Adottak az $f, g_n : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1-x}, g_n(x) = \frac{x^n}{1-x}$ függvények, ahol $n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Számítsd ki $\int_0^{\frac{1}{2}} (f(x) - g_2(x)) dx$ értékét.

5p b) Igazold, hogy $0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} g_n(x) dx \leq \frac{1}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p c) Igazold, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \dots + \frac{1}{n \cdot 2^n} \right) = \ln 2$.