

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008

II. FELADAT (30p) – 042. változat

1. Adottak az $A_0, B_0, A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrixok úgy, hogy $AB - BA = A$.

5p a) Határozd meg az A_0 mátrix rangját!

5p b) Igazold, hogy $A_0 B_0 - B_0 A_0 = A_0$.

5p c) Igazold, hogy $A^n B - B A^n = n A^n$, bármely $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ esetén!

2. Adott az $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = 4X^3 - 12X^2 + aX + b$ polinom.

5p a) Határozd meg az $a, b \in \mathbb{R}$ számokat úgy, hogy az f polinom osztható legyen az $X^2 - 1$ polinommal!

5p b) Határozd meg az $a, b \in \mathbb{R}$ számokat úgy, hogy az $x = i \in \mathbb{C}$ az $f(x) = 0$ egyenlet gyöke legyen!

5p c) Határozd meg az $a, b \in \mathbb{R}$ számokat úgy, hogy a polinom x_1, x_2, x_3 gyökei számtani haladványban legyenek és teljesüljön az $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 11$ egyenlőség!