

**Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**III. FELADAT (30p) – 064. változat**

1. Adott az  $f : (-\infty, -2) \cup (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$  függvény.

5p a) Igazold, hogy az  $f$  függvény konkáv a  $(-\infty, -2)$  intervallumon.

5p b) Számítsd ki az  $(a_n)_{n \geq 1}$ ,  $a_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n) - \ln \frac{n(n+1)}{2}$  sorozat határértékét.

5p c) Mutasd ki, hogy létezik egy  $c \in (1, 2)$  érték, amelyre  $(c-1)f'(c) + f(c) = f(2)$ .

2. Adott az  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$  függvény.

5p a) Számítsd ki:  $\int_0^1 xf(x)dx$ .

5p b) Igazold, hogy:  $\frac{\pi}{4} \leq \int_0^1 f(x)dx \leq 1$ .

5p c) Számítsd ki  $\int_0^1 g(x)dx$  határozott integrált, ahol  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \int_0^x \frac{f(t)f''(t) - (f'(t))^2}{(f(t))^2} dt$ .