

III. FELADAT (30p) – 043. változat

1. Adott az $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + e^{-x}$ függvény.

- 5p** a) Igazold, hogy az f függvény szigorúan növekvő a $[0, +\infty)$ intervallumon.
5p b) Igazold, hogy az f függvénynek pontosan egy helyi szélsőérték pontja van.
5p c) Határozd meg az $f(x) = m$ egyenlet megoldásainak számát az m valós paraméter függvényében.

2. Adottak az $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_1^{\operatorname{tg} x} \frac{t}{1+t^2} dt$ és $g: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$,

$g(x) = \int_1^{\operatorname{ctg} x} \frac{1}{t(1+t^2)} dt$ függvények.

- 5p** a) Számítsd ki $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ értékét.
5p b) Számítsd ki: $f'(x)$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
5p c) Igazold, hogy $f(x) + g(x) = 0$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.