

III. FELADAT (30p)– 037. változat

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x + 3\arctg x$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy az f függvény szigorúan növekvő \mathbb{R} -en.

5p **b)** Igazold, hogy az f függvény bijektív.

5p **c)** Határozd meg azokat az a valós számokat amelyekre a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^a}$ határérték létezik, véges és nullától különböző.

2. Adott az $(I_n)_{n \geq 1}$ sorozat úgy, hogy $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Számítsd ki I_1 értékét.

5p **b)** Igazold, hogy az $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat konvergens.

5p **c)** Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$ határértéket.