

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p) – 065. változat

1. Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + e^x$ függvény.

5p a) Igazold, hogy a függvény bijektív.

5p b) Igazold, hogy $f(x) \geq 2x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

5p c) Bizonyítsd be, hogy ha $f(x) \geq mx + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ esetén, akkor $m = 2$.

2. Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^3 x \cos x$ függvény és legyen F az f egy primitív függvénye \mathbb{R} -en.

5p a) Igazold, hogy létezik olyan $c \in \mathbb{R}$, amelyre $4F(x) = \sin^4 x + c$.

5p b) Számítsd ki az f szubgrafikonjának területét a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon.

5p c) Igazold, hogy $\int_0^\pi f^{2n+1}(x) dx = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ esetén.