

**Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**III. FELADAT (30p) – 069. változat**

1. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$  függvény.

5p a) Tanulmányozd az  $f$  függvény deriválhatóságát a 0 pontban.

5p b) Igazold, hogy bármely  $k \in (0, \infty)$  esetén létezik olyan  $c \in (k, k+1)$ , amelyre  $f(k+1) - f(k) = \frac{1}{\sqrt[3]{c}}$ .

5p c) Igazold, hogy az  $(a_n)_{n \geq 1}$ ,  $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} - f(n)$  sorozat szigorúan csökkenő.

2. Adott az  $f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x)$  függvény.

5p a) Számítsd ki:  $\int_0^1 f(x) dx$ .

5p b) Számítsd ki a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^5}$  határértéket, ha  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ ,  $x \in [0, +\infty)$ .

5p c) Igazold, hogy:  $\int_0^1 \ln(1+x) \leq \frac{5}{12}$ .