

**Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**III. FELADAT – 058. változat (30p)**

1. Adottak az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$  és  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \arctg x$  függvények.

5p a) Számítsd ki a  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)g(x))$  határértéket.

5p b) Határozd meg az  $f$  függvény helyi szélsőérték pontjait.

5p c) Igazold, hogy  $\frac{x}{1+x^2} < \arctg x$ , bármely  $x \in (0, \infty)$  esetén.

2. Adott az  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x-m, & x \in [0, 1] \\ x \ln x, & x \in (1, 2] \end{cases}$  függvény, ahol  $m \in \mathbb{R}$ .

5p a) Igazold, hogy bármely  $m \in \mathbb{R}$  esetén a függvény integrálható.

5p b) Számítsd ki a  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\int_1^x t \ln t \, dt}{x-1}$  határértéket.

5p c) Bizonyítsd be, hogy ha  $m=1$ , akkor bármely  $t \in (0, 2)$  esetén léteznek olyan  $a, b \in [0, 2]$ ,  $a \neq b$  értékek, amelyekre  $\int_a^b f(x) \, dx = (b-a)f(t)$ .