

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008

II. FELADAT (30p) – 013. változat

1. Adott az
$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ mx + y + z = 3m \end{cases}$$
 egyenletrendszer, $m \in \mathbb{R}$.

Tetszőleges $m \in \mathbb{R}$ esetén legyen S_m a rendszer valós megoldásainak halmaza.

5p a) Határozd meg az $m \in \mathbb{R}$ azon értékeit, amelyekre a rendszernek egyetlen megoldása van!

5p b) Igazold, hogy bármely $m \in \mathbb{R}$ esetén a rendszer összeférhető!

5p c) Határozd meg $\min \{x^2 + y^2 + z^2 \mid (x, y, z) \in S_1\}$.

2. Adottak az $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = A \cdot B$ mátrixok és a

$$G = \left\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid \det(X) = 1 \right\} \text{ halmaz.}$$

5p a) Igazold, hogy $A^4 = B^6 = I_2$.

5p b) Igazold, hogy (G, \cdot) a komplex elemű, invertálható másodrendű négyzetes mátrixok multiplikatív csoportjának egy részcsoportja!

5p c) Igazold, hogy $C^n \neq I_2$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén!