

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT – 060. változat (30p)

1. Adottak az $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + \sqrt{1 + x^2})$ és $g(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ függvények.

5p a) Igazold, hogy a $\ln 2$ az f függvény legkisebb értéke.

5p b) Mutasd ki, hogy bármely $x > 0$ esetén teljesül az $(e^{f(x)} - 1)g'(x) = 1$ egyenlőség..

5p c) Igazold, hogy $g(x) < x$, bármely $x > 0$ esetén.

2. Adott az $M = \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ deriválható és } \int_0^1 f(x) dx = f(0) = f(1) \right\}$ halmaz.

5p a) Igazold, hogy az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x$ függvény eleme az M halmaznak.

5p b) Igazold, hogy ha f egy harmadfokú polinom függvény az M halmazból, akkor $f\left(\frac{1}{2}\right) = f(0)$.

5p c). Igazold, hogy bármely $f \in M$ esetén az $f'(x) = 0$ egyenletnek van legalább két megoldása a $(0,1)$ intervallumban.