

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p) – 052. változat

1. Adott az $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{\pi}{x}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ függvény.

5p a) Igazold, hogy az f függvény folytonos a $[0,1]$ intervallumon.

5p b) Határozd meg az f függvény deriválhatósági tartományát.

5p c) Igazold, hogy ha $n \in \mathbb{N}^*$, akkor az $f(x) = \cos \frac{\pi}{x}$ egyenletnek van legalább egy megoldása az $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ intervallumban.

2. Adottak az $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x^2)$ és $g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x \arctg x$ függvények.

5p a) Számítsd ki: $\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx$.

5p b) Számítsd ki: $\int_0^1 g(x) dx$.

5p c) Számítsd ki az f és g függvények grafikus képe, valamint az $x=0$ és $x=1$ egyenletű egyenesek által közrezárt síkidom területét.