

**Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**III. FELADAT (30p) – 057. változat**

1. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + 1$  függvény.

5p a) Mutasd ki, hogy az  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  $x_1 = \frac{1}{2}$  és  $x_{n+1} = f(x_n)$ ,  $\forall n \geq 1$  sorozatnak van határértéke.

5p b) Mutasd ki, hogy a  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \begin{cases} xf(x), & x \leq 0 \\ \arctg x, & x > 0 \end{cases}$  függvény deriválható  $\mathbb{R}$ -en.

5p c) Határozd meg az  $a$  valós szám legnagyobb értékét úgy, hogy az  $f(x) \geq a + 2 \ln x$  egyenlőtlenség igaz legyen  $\forall x \in (0, \infty)$  esetén.

2. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{-x^2}$  függvény és legyen  $F$  egy primitív függvénye.

5p a) Számítsd ki  $\int_0^1 xf(x)dx$  értékét.

5p b) Számítsd ki a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(\cos x) - F(1)}{x^2}$  határértéket.

5p c) Igazold, hogy a  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = F(x) + f(x)$  függvénynek egyetlen helyi szélsőérték pontja van.