

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT – 061. változat (30p)

1. Adott az $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ függvény.

5p a) Igazold, hogy a függvény folytonos.

5p b) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1}$ határértéket.

5p c) Igazold, hogy a függvény szigorúan csökkenő.

2. Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + \sin^2 x)$ függvény.

5p a) Igazold, hogy az f bármely primitív függvénye növekvő \mathbb{R} -en.

5p b) Számítsd ki: $\int_0^\pi f(x) \cos x \, dx$.

5p c) Számítsd ki a $g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin x} f(t) \, dt$ függvény deriváltját.