

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008

II. FELADAT (30p) – 070. változat

1. Tetszőleges $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrixok esetén értelmezzük az $[A, B] = AB - BA$ mátrixot.

5p a) $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrix esetén számítsd ki az $[A, A^2]$ mátrixot!

5p b) Igazold, hogy bármely $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrix esetén $[A, A^*] = O_2$, ahol A^* az A adjungált mátrixa!

5p c) Igazold, hogy bármely $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrixok esetén $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = O_2$.

2. Adott az (\mathbb{R}_+^*, \cdot) multiplikatív csoport és a $H = (0, 1)$ valós számhalmaz.

5p a) Igazold, hogy az $a \circ b = \frac{ab}{ab + (1-a)(1-b)}$ egy belső művelet a H halmazon!

5p b) Igazold, hogy az $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow (0, 1), f(x) = \frac{x}{x+1}$ függvény rendelkezik az $f(xy) = f(x) \circ f(y)$ tulajdonsággal $\forall x, y > 0$ esetén!

5p c) Oldd meg a (H, \circ) struktúrában az $x \circ x \circ x = \frac{1}{2}$ egyenletet!