

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008

II. FELADAT (30p) – 046. változat

1. Adottak az $O_2, I_2, A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrixok.

5p a) Igazold, hogy $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén $\det(A - xI_2) = x^2 - (a + d)x + ad - bc$.

5p b) Ha $A^2 = O_2$, igazold, hogy $a + d = 0$.

5p c) Ha $A^2 = O_2$, számítsd ki $\det(A + 2I_2)$ értékét!

2. Adott a $G = \left\{ (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a^2 - 3b^2 = 1 \right\}$ halmaz és az

$(a, b) * (c, d) = (ac + 3bd, ad + bc)$ művelet.

5p a) Határozd meg azon $a \in \mathbb{Z}$ értékeket, amelyekre $(a, 15) \in G$.

5p b) Igazold, hogy bármely $(a, b), (c, d) \in G$ esetén $(a, b) * (c, d) \in G$.

5p c) Igazold, hogy a $(G, *)$ struktúra csoport!