

III. FELADAT (30p) – 047. változat

1. Adott az $f : \mathbb{R} \setminus \{1, -1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2 - 1}$ függvény.

5p a) Számítsd ki a $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x)$ határértéket.

5p b) Igazold, hogy az f függvény grafikus képének van aszimptotája $+\infty$ -ben.

5p c) Igazold, hogy az f függvénynek egyetlen helyi szélsőérték pontja van.

2. Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$ függvény.

5p a) Igazold, hogy a $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$ függvény a f függvény egy primitív függvénye.

5p b) Számítsd ki: $\int_0^1 f(x) dx$.

5p c) Ha $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén, igazold, hogy az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat konvergens.